I.S.I.S. Raffaele del Rosso - Giovanni da Verrazzano

Dinamica, caduta libera e statica

Prof. Sbrolli Iacopo

per le classi IASC e IBSC

A.S. 2018-2019

Versione 2 (01/04/2019)

Indice

Sezione 1

La dinamica

La dinamica è lo studio del moto dei corpi e delle sue cause. La dinamica è una dei settori fondamentali della fisica: **forse è il più importante**. Infatti, se ci pensate bene, **quasi tutti i fenomeni che avvengono nell'Universo possono essere compresi e analizzati studiando le cause del moto dei corpi**. Gli esempi sono i più disparati:

1. **Elettricità**: le correnti elettriche presenti nei fili conduttori sono causate dal **moto** delle cariche.
2. **Magnetismo**: il fenomeno dell'aurora boreale è causato dal **moto** delle particelle cariche presenti nel vento solare, che vengono intrappolate dal campo magnetico terrestre.
3. **Formazione planetaria e stelle**: i pianeti e le stelle nascono perché il pulviscolo interstellare compie dei particolari **moti** che producono i corpi celesti, dopo un lungo processo di accrescimento.
4. **Termodinamica**: la temperatura dei corpi è legata alla **velocità media** (e quindi al **moto**) delle particelle che lo compongono.
5. **Fisica dell'atmosfera**: i venti, le piogge e le nevicate sono causate da **moti** delle masse d'aria e del vapore acqueo.

I concetti fondamentali per comprendere l'essenza della dinamica dei corpi non sono poi così tanti:

1. Il primo è che l'Universo sarebbe in quiete se non ci fossero accelerazioni: tutti i corpi si muoverebbero di moto rettilineo uniforme all'infinito e non accadrebbe niente di interessante. È quindi importante capire quando un corpo accelera.
2. Le accelerazioni sono causate da **interazioni** tra i corpi. Queste interazioni sono dette **forze**. L'accelerazione subita da un corpo è uguale al rapporto tra la forza applicata sul corpo e la massa del corpo:

   $$\vec{\mathrm{a}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{m}} \tag{1.1}$$

   La forza è un vettore. Qualora non fossimo interessati a studiare il moto su più dimensioni potremo considerare la forza come una quantità scalare. La massa è la quantità di materia contenuta in un corpo: maggiore è la massa di un corpo, maggiore è la resistenza che esso oppone all'accelerazione.
3. Esistono tante forze, di varia natura. Alcune forze agiscono **solo sulle masse** (come la forza di gravità **newtoniana**), alcune agiscono **solo sulle cariche elettriche ferme** (come la forza elettrica), altre agiscono solo sulle **cariche elettriche in moto** (come la forza magnetica), e così via. **Ogni forza ha la sua specifica formula, perché è legata a specifiche proprietà dei corpi**. Dato che la forza di gravità è legata alla massa dei corpi ci dovremo aspettare una massa nella formula che la descrive; la forza elettrica è legata alla carica dei corpi, per cui nella sua formula ci dovremo aspettare la carica elettrica, e così via.

1.1 Gli scopi della dinamica

La dinamica si propone di descrivere il moto nei corpi in situazioni fisiche reali. Per farlo, ovviamente, è necessario conoscere le **cause** di questi moti, ovvero le **forze presenti in una specifica situazione**.

Come abbiamo visto durante lo studio della cinematica, per descrivere il moto di un corpo è necessario conoscerne la **posizione** e la **velocità** in ogni istante di tempo. **Lo scopo ultimo della dinamica è creare delle equazioni predittive che descrivano il moto dei corpi dall'istante iniziale fino alla fine dell'eternità in situazioni fisiche reali**. Sono un po' megalomani i fisici, non è vero?

Le equazioni predittive della dinamica devono essere nella seguente forma:

$$\vec{P} = f_1(t) \tag{1.2}$$
$$\vec{v} = f_2(t) \tag{1.3}$$

dove $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono due termini che contengono il tempo. **Per descrivere il moto rettilineo uniforme, ad esempio, le equazioni sono le seguenti**:

$$\vec{\mathrm{P}} = (\mathrm{v}_x \cdot \Delta t + x_i; \mathrm{v}_y \cdot \Delta t + y_i) \tag{1.4}$$
$$\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}_x; \mathrm{v}_y) \tag{1.5}$$

dovd v_x è la velocità sull'asse x (sempre costante), v_y è la velocità sull'asse y (idem), x_i è la coordinata x iniziale, y_i è la coordinta y finale e Δt è l'intervallo di tempo. **Il significato di queste equazioni è semplice**. In pratica, la posizione è data dalla somma della posizione iniziale $[\vec{\mathrm{P}}_i = (x_i; y_i)]$ e dello spostamento $[\vec{\mathrm{S}} = (\mathrm{v}_x \cdot \Delta t; \mathrm{v}_y \cdot \Delta t)]$. La velocità è costante.

1.1.1 Esercizi

1. Trova la posizione di un corpo che si trova inizialmente nel punto $\vec{\mathrm{P}}_i = (3, 5)$ m dopo 10 secondi usando la legge del moto rettilineo uniforme, sapendo che la sua velocità è data dal vettore $\vec{\mathrm{v}} = (1, 1)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Prima di iniziare il problema individua i termini x_i, y_i, v_x e v_y che sono stati forniti dal docente.

2. Trova la posizione di un corpo che si trova inizialmente nel punto $\vec{\mathrm{P}}_i = (3, -2)$ m dopo 20 secondi usando la legge del moto rettilineo uniforme, sapendo che la sua velocità è data dal vettore $\vec{\mathrm{v}} = (2, 1)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Prima di iniziare il problema individua i termini x_i, y_i, v_x e v_y che sono stati forniti dal docente.

1.2 L'accelerazione

L'accelerazione è la variazione di velocità nell'intervallo di tempo. Per l'esattezza, essa è definita come **il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo**:

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{\vec{\mathrm{v}_f} - \vec{\mathrm{v}_i}}{\Delta \mathrm{t}} \tag{1.6}$$

dove $\vec{\mathrm{a}}$ è l'accelerazione, $\vec{\mathrm{v}_f}$ è la velocità finale del corpo, $\vec{\mathrm{v}_i}$ è la velocità iniziale del corpo e $\Delta\mathrm{t}$ è l'intervallo di tempo.

Ricordate: **se un corpo accelera c'è una forza, ma non è sempre vero che se un corpo non accelera non c'è una forza**. Infatti, se ci pensate bene, un pezzo di legno che galleggia in acqua ha un peso, ma non affonda. Questo accade perché l'acqua produce una forza (detta *forza di galleggiamento*) che compensa la forza peso. **Se un corpo non accelera la somma di tutte le forze è nulla**.

1.2.1 Esercizi

1. Determina una formula inversa per la velocità finale. Di quali dati ho bisogno per determinare la velocità finale?

2. Un pallone rotola in un campo. Do un calcio al pallone. Se l'accelerazione che causo è 40 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, se il contatto tra piene e palla dura $0,07$ s e se la velocità iniziale del pallone è 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, trova la velocità finale del pallone.

3. Determina una formula inversa per la velocità iniziale. Di quali dati ho bisogno per determinare la velocità iniziale del corpo?

4. Un pallone rotola in un campo. Do un calcio al pallone. Se l'accelerazione che causo è 30 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, se il contatto tra piene e palla dura $0,14$ s e se la velocità finale del pallone è 8 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, trova la velocità iniziale del pallone.

5. Determina una formula inversa per l'intervallo di tempo trascorso. Di quali dati ho bisogno per determianre l'intervallo di tempo trascorso?

1.3 La forza peso

La forza peso (o peso, o forza di gravità) è una forza che agisce sulle masse ed è causata dalla presenza di masse. **La Luna, ad esempio, ruota attorno alla Terra perché entrambi i corpi sono provvisti di massa: la Terra causa una forza di attrazione nei confronti della Luna**. I corpi aventi massa (sui quali agisce la forza di gravità) sono detti *gravi*. **Non tutti i corpi hanno massa**: i fotoni, le particelle che trasportano la luce, non hanno massa.

La forza peso dipende da tre fattori:

1. La distanza del grave dal centro del pianeta. Maggiore è la distanza, minore è la forza peso.
2. La massa del pianeta. Maggiore è la massa del pianeta, maggiore è la forza peso.
3. La massa del grave. Maggiore è la massa del grave, maggiore è la forza peso.

Sulla superficie terrestre la distanza dal centro della Terra è quasi costante (è leggermente maggiore all'equatore, dove vale circa 6378 km; ai poli vale circa 6356 km). Sulla superficie terrestre un grave ha *quasi* lo stesso peso dappertutto.

La forza peso è un vettore diretto verso il centro della Terra.

1.3.1 La forza peso sulla Terra

Sperimentalmente (verificatelo a casa!) si trovano due risultati importanti:

1. La forza peso causa un'accelerazione. Infatti, se teniamo in mano un grave fermo (una penna, una gomma) e lo lasciamo cadere, la velocità del grave aumenterà sempre di più. **La forza peso esiste: c'è un'accelerazione, quindi c'è una forza**.
2. Tutti i corpi attratti dalla Terra impiegano lo stesso tempo a cadere, se li lasciamo andare dalla stessa altezza. **Questo significa che l'accelerazione causata dalla gravità non dipende dalla massa**. Ci aspetteremmo che la forza di gravità sia più bassa per i corpi meno massicci (equazione 1.1), ma non è così!

Se il tempo che i corpi che cadono sulla Terra impiegano a cadere (dalla stessa altezza) è sempre lo stesso, allora l'accelerazione di gravità deve essere sempre la stessa. Chiamiamo questa accelerazione g. Per ricavare la formula della forza peso basterà utilizzare l'equazione 1.1, e scrivere $\vec{\mathrm{g}}$ al posto di $\vec{\mathrm{a}}$ e scrivere $\vec{\mathrm{F}}_p$ (forza peso) al posto di $\vec{\mathrm{F}}$ (una generica forza):

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{g}} &= \frac{\vec{\mathrm{F}}_p}{\mathrm{m}} \\ \frac{\vec{\mathrm{F}}_p}{\mathrm{m}} &= \vec{\mathrm{g}} \\ \frac{\vec{\mathrm{F}}_p}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \cancel{\mathrm{m}} &= \vec{\mathrm{g}} \cdot \mathrm{m} \\ \vec{\mathrm{F}} &= \vec{\mathrm{g}} \cdot \mathrm{m} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Come possiamo osservare, **la forza peso è direttamente proporzionale alla massa del corpo**.

L'accelerazione di gravità è un vettore diretto verso il centro della Terra.

1.3.2 La forza peso su altri corpi celesti

Anche sugli altri corpi celesti è valida la formula 1.7, ma il valore di g cambia. Per trovare il valore di g è necessario utilizzare la seguente formula:

$$\mathrm{g} = \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2} \tag{1.8}$$

dove G **è una delle costanti fondamentali della natura: è detta «costante di gravitazione universale»**. È uguale in tutto l'Universo (vale circa $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$). M è la massa del pianeta, mentre R è la distanza dal centro del pianeta.

1.3.3 Esercizi

1. Se lascio cadere una monetina (inizialmente ferma) per 20 secondi in un pozzo profondo, quanto varrà la sua velocità al momento dell'impatto?
2. Quale forza sarà necessaria per sollevare una lavatrice di 80kg sulla Terra?
3. Trova il valore dell'accelerazione di gravità su Marte cercando online i dati di massa e raggio del pianeta rosso.

1.4 Le forze di attrito

Le forze di attrito sono *forze dissipative*: rallentano i corpi, sempre e comunque. Esse hanno la stessa direzione del vettore spostamento del corpo, ma verso opposto a tale vettore.

L'attrito è causato da numerosi effetti di grandissima complessità, che non possiamo trattare adeguatamente adesso (forse nemmeno gli alunni di quinta ne sarebbero capaci). Ci limiteremo a studiare il fenomeno dell'attrito da un punto di vista intuitivo e semplificato. **I termini ≪attrito≫ e ≪forza di attrito≫ sono sinonimi**.

Esistono molti tipi di forze di attrito, tra i quali annoveriamo:

1. La forza di attrito radente, che si produce quando un corpo striscia su una superficie.
2. La forza di attrito volvente, che si produce quando un corpo rotola su una superficie.
3. La forza di attrito viscoso, che si produce quando un corpo attraversa un fluido.

Le forze (1) e (2) sono dette *attriti di superficie*, perché agiscono quando due superfici sono a contatto; la forza (3) è un *attrito di volume*, perché agisce quando un corpo è completamente immerso in un fluido (e non quando ≪striscia≫ sopra al fluido).

Un elemento comune a tutti gli attriti è il seguente: **la diminuzione di velocità che causano si traduce in un aumento di temperatura del corpo**. Provate a sfregarvi le mani, se non mi credete...

1.4.1 Attrito radente

Per trovare la formula dell'attrito radente dobbiamo prima capire da cosa può dipendere questo tipo di forza. Possiamo affermare che essa **dipende dal peso del corpo**, o comunque dalle forze che spingono il corpo verso la superficie. Se non mi credete, provate a spostare sul tavolo una penna, prima senza premerci sopra e poi premendoci, e osservate le differenze.

L'attrito dipende sicuramente anche dal tipo di superficie: **maggiore è la rugosità della superficie (e del corpo), maggiore sarà l'attrito**. La formula per la forza di attrito dovrà quindi contenere la forza peso e un coefficiente che quantifichi la rugosità della superficie.

Sperimentalmente, troviamo questo risultato:

$$\mathrm{F}_{a\ rad} = \mu_{a\ rad} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \tag{1.9}$$

dove $\mathrm{F}_{a\ rad}$ è la forza di attrito radente, $\mu_{a\ rad}$ è il *coefficiente di attrito radente* (non ha unità di misura), m è la massa del corpo e g è l'accelerazione di gravità. Per una tabella di valori del coefficiente di attrito radente cliccate sul seguente link: `http://www.pasquali.org/dispense/Coefficienti%20di%20attrito.pdf`.

1.4.2 Attrito volvente

L'attrito volvente si manifesta qualora un corpo rotoli su una superficie.

I corpi iniziano a rotolare solo se c'è un attrito radente che impedisca al corpo di ≪sgommare≫. Infatti, le ruote delle automobili ≪scivolano≫ pericolosamente solo se l'attrito radente è molto basso (sulla neve, sul ghiaccio, sulla strada bagnata). Se l'attrito radente è sufficientemente forte, **il punto di contatto tra ruota e superficie si ferma e inizia il rotolamento**.

La forza di attrito volvente è dovuta alla **deformazione della ruota e della superficie su cui preme**. In generale, **la forza di attrito volvente è molto meno intensa della forza di attrito radente**: **è per questo che il trasporto su mezzi provvisti di ruote è molto efficace**. La formula della forza di attrito volvente è simile a quella utilizzata per l'attrito radente:

$$\mathrm{F}_{a\ vol} = \mu_{a\ vol} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \tag{1.10}$$

dove $\mathrm{F}_{a\ vol}$ è la forza di attrito volvente e $\mu_{a\ vol}$ è il coefficiente di attrito volvente. Il coefficiente $\mu_{a\ vol}$ dipende dal raggio della ruota e dall'elasticità della ruota e del terreno.

1.4.3 Attrito viscoso

L'attrito viscoso si manifesta qualora un corpo viaggi in un fluido. **Se un corpo viaggia in un fluido, sarà urtato dalle particelle che lo compongono, che tenderanno a rallentarlo**.

L'attrito viscoso **dipende dalla velocità del corpo nel fluido**, perché all'aumentare della velocità aumenta la violenza degli urti del corpo contro le particelle.

La forza di attrito viscoso è descritta dalla seguente equazione:

$$\mathrm{F}_{a\ vis} = \frac{1}{2}\mathrm{d} \cdot \mathrm{C}_d \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{v}^2 \tag{1.11}$$

dove d è la densità del fluido, C_d è il *coefficiente di drag* (che dipende dalla forma dell'oggetto), S è la superficie di impatto e v è la velocità del corpo nel fluido.

Attenzione: non confondete i termini ≪fluido≫ e ≪liquido≫. La macrocategoria dei fludi include tutti gli aeriformi (gas e vapori) e i liquidi. **In generale, un fluido è un materiale che non ha una forma propria.** La differenza tra vapore e gas è la seguente: **un vapore è tale se può liquefarsi senza che la sua temperatura cambi**, mentre **un gas è tale se non può liquefarsi se la sua temperatura non viene abbassata**. Il *vapore acqueo* in atmosfera è appunto un vapore perché può condensarsi a temperatura ambiente (fenomeno della rugiada; formazione delle nubi; nebbia). L'ossigeno è un gas perché non può essere in alcun modo liquefatto se la sua temperatura è superiore a $-118,5°\mathrm{C}$ (questa temperatura è detta **temperatura critica**).

1.4.4 Esercizi

1. Una briciola di pane affonda nell'olio. Che tipo di attrito si manifesta? Perché?
2. Un uomo in bicicletta finisce fuori strada perché un camion ha versato un carico di olio sulla superficie stradale. Che tipo di attrito si manifesta? Perché?
3. Trova la forza di attrito che rallenta un pattinatore (ghiaccio su acciaio), sapendo che il pattinatore è lo Sbrolli (massa pari a 73kg). Usa i coefficienti di attrito dati nella tabella fornita dal link alla fine del paragrafo 1.4.1.

1.5 I principi della dinamica

I principi della dinamica sono tre. Tramite tali principi è possibile descrivere molte delle leggi fondamentali della natura.

1.5.1 Primo principio

Il primo è il seguente: *un corpo che non subisce forze (o che subisce forze che si annullano a vicenda) non accelera.* Se un corpo non accelera la sua velocità è sempre costante. **È quindi sbagliato dire che un corpo che non subisce forze rimane sempre fermo**. Infatti, se pensate di spingere un vostro compagno di classe sul ghiaccio (Angelo se siete in IA, Michelangelo se siete in IB), visualizzerete certamente che la loro velocità non diminuirà mai, perché il ghiaccio non produce resistenza (attrito) al loro moto, se non in minima parte.

1.5.2 Secondo principio

Il secondo principio è il seguente: *l'accelerazione di un corpo è uguale al rapporto tra la forza impressa sul corpo e la sua massa*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1.12}$$

Il significato del principio è il seguente: ipotizziamo di avere due corpi uguali (due palloni da calcio). **Se tocco il primo pallone con un dito e do un calcio violento al secondo**, è chiaro che il secondo pallone accelererà di più: **c'è una relazione di proporzionalità diretta tra forza esercitata sul corpo e accelerazione del corpo**.

Ipotizziamo ora di avere due corpi diversi: un pallone e una casa. Supponiamo ora di applicare la stessa forza sui due corpi dando loro un calcio. È evidente che il corpo di massa maggiore (la casa) accelererà di meno: **c'è una relazione di proporzionalità inversa tra accelerazione del corpo e massa del corpo**. Abbastanza intuitivo no?

1.5.3 Terzo principio

Il terzo principio è il seguente: *se su un corpo ≪A≫ agisce una forza (F_A), quella forza sarà necessariamente causata da un corpo ≪B≫ simile; il corpo ≪B≫ subirà dal corpo ≪A≫ una forza F_B uguale e opposta a F_A.*

Questo principio può sembrare incomprensibile, ma è in realtà molto semplice. Il suo significato è il seguente: **non esistono corpi supremi che provocano forze e non ne subiscono**. Tutti i corpi, se sono in grado di generare una forza su un secondo corpo, subiscono a loro volta una forza. Questo è normale: non c'è nessun motivo per cui alcuni corpi dovrebbero essere ≪speciali≫, causare le forze e non subirle.

Facciamo un esempio concreto: prendiamo la Terra e la Luna. Si dice spesso che la Luna ruota attorno alla Terra, come se la Terra causasse una forza sulla Luna la quale, inerme, non può far altro che roteare vorticosamente attorno al nostro pianeta. **Nulla di più falso**. Anche la Terra subisce una forza di attrazione causata dalla Luna. E vi dirò di più: **questa forza ha la stessa intensità di quella causata dalla Terra sulla Luna!**. L'unico motivo per cui la Terra è poco influenzata da questa enorme forza è l'equazione 1.1: *l'accelerazione di un corpo è inversamente proporzionale alla massa del corpo*. Dato che la Terra è molto più massiccia della Luna la sua traiettoria viene deformata ben poco dal satellite.

1.5.4 Esercizi

1. Dimostra che il primo principio della dinamica può essere dedotto dal secondo.
2. Se colpisco una lastra con un pugno la lastra si rompe, ma mi faccio male. A quale principio è dovuto questo effetto?
3. Se immergo un pallone da calcio sott'acqua il pallone risale a galla. A quale principio della dinamica è dovuto questo effetto?
4. La sonda Voyager 2 è stata lanciata nel 1977 per osservare Giove e Saturno (poi osservò anche Urano e Nettuno). Ancora non si è fermata, anche se non ha più carburante: ha varcato il limite del sistema solare. A quale principio della dinamica è dovuto questo fatto?
5. Una biglia rossa (in moto) colpisce una biglia verde (ferma). Dopo l'urto, la biglia rossa si ferma e la biglia verde acquista una velocità. A quale principio della dinamica è dovuto questo effetto?

1.6 Caduta libera

La caduta libera è **un moto *rettilineo* uniformemente accelerato**. Se un moto è **rettilineo**, la traiettoria che compie l'oggetto è una retta (ma dai?). Se un moto è **uniformemente accelerato**, l'accelerazione del corpo che si muove è sempre uguale: questo significa che la velocità del corpo aumenta sempre più con un ritmo costante. Con la caduta libera abbiamo a che fare tutti i giorni, perché le cose ci cadono di mano continuamente: per questo motivo è importante studiare questo tipo di moto. Attenzione: a causa dell'attrito viscoso, la caduta libera vera e propria può essere osservata sulla Terra solo per corpi che siano influenzati poco dalla presenza dell'aria. **La decelerazione dovuta all'attrito dell'aria è data dalla seguente formula**:

$$a_{avis} = \frac{F_{avis}}{m} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d} \cdot \mathrm{C}_d \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{v}^2}{m} \tag{1.13}$$

dove a_{avis} è la *decelerazione* del corpo che cade, m è la massa del corpo, d è la densità del fluido, C_d è il *coefficiente di drag* (che dipende dalla forma dell'oggetto: non ha unità di misura), S è la superficie di impatto e v è la velocità del corpo nel fluido. Si vede subito che la decelerazione è **inversamente proporzionale** alla massa del corpo (perché è al denominatore) ed è **direttamente proporzionale** alla superficie di impatto (perché è al numeratore). L'attrito viscoso è quindi particolarmente intenso sui corpi la cui superficie di impatto è elevata e la cui massa è molto ridotta (foglie, fogli di carta). Questi corpi non seguono le leggi della caduta libera.

Sulla Terra, come su qualsiasi altro pianeta, planetoide, satellite e asteroide **è presente un'accelerazione dovuta all'attrazione gravitazionale**. Questa accelerazione è costante sulla superficie del pianeta, a patto che la forma del pianeta sia sferica. Ricordiamo che l'accelerazione di gravità può essere trovata tramite la seguente formula:

$$\mathrm{a} = \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2} \tag{1.14}$$

dove G è una costante universale della natura, detta *costante di gravitazione universale*, M è la massa del corpo attrattore e R è la distanza dal centro del corpo attrattore.

Ora, dato che un grave che cade nella vita di tutti i giorni non percorre grosse distanze (al massimo qualche decina di metri) l'accelerazione di gravità durante la sua caduta non varia molto, **anche se cadendo il grave si avvicina leggermente al centro del pianeta**: per questo motivo la caduta libera è un moto uniformemente accelerato.

1.6.1 Tempo di caduta e altezza: velocità iniziale nulla

Come sapete, i fisici vogliono prevedere il futuro. Ai fisici ad esempio piacerebbe conoscere la posizione di un corpo che cade in funzione del tempo trascorso.

Per ottenere questa informazione è necessario fare un ragionamento cinematico alquanto articolato. Ricordate: **il nostro obiettivo è trovare la posizione del corpo che cade nel tempo**. Per farlo occorrerà fare diverse considerazioni sulla velocità del corpo.

Vediamo insieme il ragionamento:

1. **Ipotesi e ottenimento di una formula per h**

   1.1. Supponiamo prima di tutto che la velocità iniziale del corpo sia nulla (lasciamo cadere il corpo senza lanciarlo):
   $$v_i = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   1.2. Sappiamo che la velocità media, per definizione, è uguale al rapporto tra lo spazio totale percorso (lo spostamento) e il tempo totale trascorso. Dato che lo spazio percorso è verticale possiamo utilizzare la lettera h per indicarlo (h sta per *height*, *höhe* o *hauteur*, cioè altezza in inglese, tedesco e francese).
   $$\mathrm{v}_m = \frac{\mathrm{h}}{\Delta t}$$

   1.3. Tramite la formula inversa otteniamo:
   $$\mathrm{h} = \mathrm{v}_m \cdot \Delta t$$

   1.4. **Questa potrebbe essere la formula finale**: tramite di essa troviamo l'altezza, cioè la posizione del corpo nel tempo. **Il problema di questa formula** è che compare la velocità media, mentre nel nostro caso la velocità varia (il corpo, cadendo, accelera). **Non possiamo misurare la velocità media**, ma conosciamo molto bene l'accelerazione di gravità del pianeta, per cui vogliamo farla comparire nella formula.

2. **Eliminazione della velocità media dalla formula**.

   2.1. Sappiamo che la velocità media è, per definizione:
   $$\mathrm{v}_m = \frac{v_i + v_f}{2}$$
   Ma dato che v_i è nulla otteniamo:
   $$\mathrm{v}_m = \frac{v_f}{2}$$

   2.2. **Non possiamo misurare agevolmente la velocità finale del corpo**. Vogliamo esprimere la velocità finale in base all'accelerazione di gravità, che conosciamo.

   2.3. L'accelerazione del corpo che cade è costante (è espressa con la lettera g). Per definizione:
   $$g = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

   2.4. Dato che la velocità iniziale è nulla, otteniamo:
   $$g = \frac{v_f}{\Delta t}$$

   2.5. Con la formula inversa otteniamo:
   $$v_f = g \cdot \Delta t$$

3. **Sostituzione a ritroso**

3.1. Utilizziamo l'espressione $v_f = g \cdot \Delta t$ per determinare la velocità media:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{v_f}{2} \\ v_m &= \frac{g \cdot \Delta t}{2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

3.2. Finalmente abbiamo ottenuto un'espressione per la velocità media in funzione dell'accelerazione di gravità! Sostituiamola nella formula iniziale per trovare lo spazio verticale percorso (l'altezza):

$$\begin{aligned} h &= v_m \cdot \Delta t \\ h &= (\frac{g \cdot \Delta t}{2}) \cdot \Delta t \\ h &= \frac{g \cdot \Delta t^2}{2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

La formula che abbiamo ottenuto può essere utile, ad esempio, **per trovare la profondità di un pozzo lanciando al suo interno un oggetto che tintinna** (come una monetina o un bicchiere). Se misuriamo il tempo che la monetina impiega a cadere con un cronometro abbiamo tutte le informazioni per trovare h.

1.6.2 Tempo di caduta

Per descrivere qualche simpatica applicazione della formula inversa tramite cui si ottiene il tempo di caduta in base allo spazio verticale da percorrere il docente ha pensato di raccontarvi un paio di aneddoti fittizi.

Un giorno Alice mi ha detto di aver lasciato cadere un CD dei Queen dalla finestra.

ALICE:≪Mi fanno schifo i Queen, prof!≫

PROF:≪De gustibus et coloribus...≫

ALICE:≪...non disputandum est!≫

PROF:≪Esatto! Ascolta, ma quanto tempo ci ha messo il CD a cadere?≫

ALICE:≪Non lo so, tipo dieci secondi...≫

PROF:≪Dieci secondi? Ma non è possibile! Tu mi prendi in giro!≫

ALICE:≪Io non la prendo in giro! Vivo su un palazzo molto alto!!≫

PROF:≪Quanto alto?≫

ALICE:≪Non lo so... Tipo **20 metri**...≫

PROF:≪20 metri esatti? Allora in teoria il CD ha impiegato **2,02 secondi** a cadere!≫

ALICE:≪E come può dirlo?≫

PROF:≪Trucchi magici, Alice, trucchi magici!≫

ALICE (tra sé e sé): "*Chissà se ha tenuto conto dell'attrito viscoso...*"

Il giorno successivo, io e Riccardo decidemmo di volare su un aeroplano. Improvvisamente, il velivolo smise di funzionare.

RICCARDO:≪Prof, stiamo precipitando!≫

PROF:≪Per Zeus e tutti gli dèi dell'Olimpo! Chi ha costruito questo trabiccolo?≫

RICCARDO:≪Credo sia stato un tale Albiati...≫

PROF:≪Non ha importanza! A che quota siamo?≫

RICCARDO:≪**9000 metri**!≫

PROF:≪Cerca il paracadute! Abbiamo **42 secondi** prima dell'impatto!!≫

Oh, quanti trucchi, questa fisica! Ma come fa il docente a dedurre il tempo di caduta in base all'altezza a cui si trovano gli oggetti che precipitano?

Semplice: ha utilizzato una formula inversa. Come ottenerla? Partiamo dalla formula che abbiamo trovato in precedenza per lo spazio verticale percorso:

$$h = \frac{g \cdot \Delta t^2}{2} \tag{1.17}$$

Scambiamo i due membri:

$$\frac{g \cdot \Delta t^2}{2} = h \tag{1.18}$$

Individuiamo i termini che ci danno fastidio: si tratta di g e del 2. Per eliminarli, prima di tutto, si moltiplica ambo i membri per 2: in questo modo il 2 al denominatore sparisce.

$$\cancel{2} \cdot \frac{g \cdot \Delta t^2}{\cancel{2}} = 2 \cdot h \tag{1.19}$$

Adesso dividiamo ambo i membri per g:

$$\frac{\cancel{g} \cdot \Delta t^2}{\cancel{g}} = \frac{2 \cdot h}{g} \tag{1.20}$$

Infine, dobbiamo estrarre **una radice quadrata** per trovare il tempo di caduta:

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta t^2} &= \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}\\ \Delta t &= \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}\end{aligned} \tag{1.21}$$

Otteniamo facilmente i risultati del professore. Il tempo di caduta del CD di Alice si ottiene seguendo i passaggi sottostanti:

$$\begin{aligned}\Delta t_{CD} &= \sqrt{\frac{2\cdot h_{finestra}}{g}}\\ \Delta t_{CD} &= \sqrt{\frac{2\cdot 20\ \mathrm{m}}{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\\ \Delta t_{CD} &= \sqrt{\frac{40}{9,8}}\ \mathrm{s}\\ \Delta t_{CD} &= \sqrt{4,08}\ \mathrm{s}\\ \Delta t_{CD} &\approx 2,02\ \mathrm{s}\end{aligned} \tag{1.22}$$

Il tempo di caduta dell'aeroplano, invece, si ottiene seguendo i passaggi sottostanti:

$$\begin{aligned}\Delta t_{aereo} &= \sqrt{\frac{2\cdot h_{aereo}}{g}}\\ \Delta t_{aereo} &= \sqrt{\frac{2\cdot 9000\ \mathrm{m}}{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\\ \Delta t_{aereo} &= \sqrt{\frac{18000}{9,8}}\ \mathrm{s}\\ \Delta t_{aereo} &= \sqrt{1836}\ \mathrm{s}\\ \Delta t_{aereo} &\approx 42,8\ \mathrm{s}\end{aligned} \tag{1.23}$$

1.6.3 Velocità iniziale diversa da zero

Se la velocità iniziale è diversa da zero, cioè se lanciamo il corpo verso l'alto o verso il basso invece di lasciarlo cadere, è chiaro che lo spostamento che compierà il corpo in un certo tempo sarà diverso e dipenderà dal valore della velocità iniziale.

Per trovare questo spostamento seguiamo la stessa procedura vista in precedenza:

1. **Ipotesi e ottenimento di una formula per h**

   1.1. Sappiamo che la velocità media, per definizione, è uguale al rapporto tra lo spazio totale percorso (lo spostamento) e il tempo totale trascorso. Dato che lo spazio percorso è verticale possiamo utilizzare la lettera h per indicarlo (h sta per *height*, *höhe* o *hauteur*, cioè altezza in inglese, tedesco e francese).
   $$\mathrm{v}_m = \frac{\mathrm{h}}{\Delta t}$$

   1.2. Tramite la formula inversa otteniamo:
   $$\mathrm{h} = \mathrm{v}_m \cdot \Delta t$$

   1.3. **Questa potrebbe essere la formula finale**: tramite di essa troviamo l'altezza, cioè la posizione del corpo nel tempo. **Il problema di questa formula** è che compare la velocità media, mentre nel nostro caso la velocità varia (il corpo, cadendo, accelera). **Non possiamo misurare la velocità media**, ma conosciamo molto bene l'accelerazione di gravità del pianeta, per cui vogliamo farla comparire nella formula.

2. **Eliminazione della velocità media dalla formula**.

   2.1. Sappiamo che la velocità media è, per definizione:
   $$\mathrm{v}_m = \frac{v_i + v_f}{2}$$

   2.2. **Non possiamo misurare agevolmente la velocità finale del corpo**. Vogliamo esprimere la velocità finale in base all'accelerazione di gravità, che conosciamo.

   2.3. L'accelerazione del corpo che cade è costante (è espressa con la lettera g). Per definizione:
   $$g = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

   2.4. Con la formula inversa otteniamo:
   $$v_f = v_i + g\cdot\Delta t$$

3. **Sostituzione a ritroso**

3.1. Utilizziamo l'espressione $v_f = v_i + g \cdot \Delta t$ per determinare la velocità media:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{v_i + v_f}{2} \\ v_m &= \frac{v_i + g \cdot \Delta t + v_i}{2} \\ v_m &= \frac{2v_i + g \cdot \Delta t}{2} \\ v_m &= \frac{2v_i}{2} + \frac{g \cdot \Delta t}{2} \\ v_m &= v_i + \frac{g \cdot \Delta t}{2} \end{aligned} \tag{1.24}$$

3.2. Finalmente abbiamo ottenuto un'espressione per la velocità media in funzione dell'accelerazione di gravità! Sostituiamola nella formula iniziale per trovare lo spazio verticale percorso (l'altezza):

$$\begin{aligned} h &= v_m \cdot \Delta t \\ h &= (v_i + \frac{g \cdot \Delta t}{2}) \cdot \Delta t \\ h &= v_i \cdot \Delta t + \frac{g \cdot \Delta t^2}{2} \end{aligned} \tag{1.25}$$

L'equazione che abbiamo ottenuto è la cosiddetta «legge oraria» del moto uniformemente accelerato. **Una legge oraria è un'equazione che descrive la posizione del corpo in funzione del tempo trascorso**.

1.6.4 Tempo di caduta con velocità iniziale

Come è stato fatto in precedenza, è possibile ottenere il tempo di caduta anche qualora sia presente una velocità iniziale. **Non avete ancora gli strumenti per comprendere la derivazione di questa formula inversa**, per cui ve la fornisco senza dimostrazione:

$$\Delta t = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g} \tag{1.26}$$

Ricordate che **una velocità iniziale negativa corrisponde a un lancio dell'oggetto verso l'alto** mentre **una velocità iniziale positiva corrisponde a un lancio dell'oggetto verso il basso**.

Tramite questa formula dovremmo ottenere tempi di caduta maggiori **lanciando l'oggetto verso l'alto**. Facciamo un esempio per vedere se è vero.

Riccardo lancia un lapis dalla finestra del Baccarini da 11,25 metri di altezza. Ipotizziamo, per semplicità, che l'accelerazione di gravità valga 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Troviamo il tempo che la gomma impiega a cadere se Riccardo lancia l'oggetto verso l'alto con $v_i = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g} \\ \Delta t &= \frac{-(-5) + \sqrt{5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 11,25}}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{5 + \sqrt{225}}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{5 + 15}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{20}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= 2\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ipotizziamo ora che Riccardo scagli la gomma verso il basso con una velocità iniziale $v_i = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g} \\ \Delta t &= \frac{-(5) + \sqrt{5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 11,25}}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{-5 + \sqrt{225}}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{-5 + 15}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= \frac{10}{10}\ \mathrm{s} \\ \Delta t &= 1\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{1.28}$$

1.6.5 Equivalenza delle formule del tempo di caduta per $v_i = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

È ovvio che le due formule del tempo di caduta, apparentemente diverse, devono dare lo stesso identico risultato se la velocità iniziale è nulla.

Prendiamo l'equazione 1.26 e imponiamo $v_i = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Otteniamo:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{2gh}}{g} \tag{1.29}$$

Apparentemente l'equazione 1.21 è diversa, ma in realtà è esattamente uguale. **Provate a fare i conti con la calcolatrice, se non mi credete**, prendendo sempre in considerazione l'esempio di Riccardo che lancia la gomma dalla finestra. Se la velocità iniziale è nulla, utilizzando la formula 1.29 si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 11,25}}{10} \text{ s} \\ \Delta t &= \frac{15}{10} \text{ s} \\ \Delta t &= 1,5 \text{ s} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Utilizzando l'equazione 1.21 si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{\frac{2 \cdot 11,25}{10}} \text{ s} \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{22,5}{10}} \text{ s} \\ \Delta t &= \sqrt{2,25} \text{ s} \\ \Delta t &= 1,5 \text{ s} \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.7 Grafici spazio-tempo

È importante saper rappresentare il moto dei corpi sui grafici spazio-tempo e velocità-tempo. Tali grafici rappresentano lo spazio percorso e la velocità istantanea in funzione del tempo passato dall'istante iniziale (ovvero l'istante in cui le misure cominciano).

Supponiamo ad esempio di lasciar cadere un uovo dal terrazzo. Se la velocità iniziale dell'uovo è nulla si ha:

$$h_{uovo} = \frac{g \cdot \Delta t^2}{2}$$

Vogliamo rappresentare lo spazio verticale percorso in funzione del tempo. Per effettuare questa rappresentazione dobbiamo creare una tabella che associ a ciascun istante di tempo un certo valore di h. **I valori di tempo possono essere quelli che preferiamo**. Ora che

Tabella dei valori	
Δt	h
$0,5$ s	$1,25$ m
1 s	5 m
$1,5$ s	$11,2$ m
2 s	20 m

abbiamo un buon numero di valori possiamo creare il grafico.

1.8 Analisi dimensionale

Non fidatevi <u>mai</u> di *nessuno*, ragazzi. Sono tutti pronti a raccontarvi un sacco di baggianate per aggirarvi e spillarvi tutti i quattrini. C'è chi sostiene che **la Terra è piatta**. C'è chi asserisce che **il numero di pirati nel mare è inversamente proporzionale alla temperatura dell'aria**. Balle! Tutte balle!

Ricordate che **uno scienziato degno di questo nome non è una persona che sa tante formule a memoria**, ma è una persona che è in grado di **confutare le asserzioni astruse di chi vuole ingannare il prossimo** tramite il metodo scientifico.

Un primo passo per diventare scienziati è l'acquisizione di senso critico. Dovete mettere in dubbio le formule che vi propino nelle dispense. **Dovete assicurarvi che siano esatte o almeno sensate**. Ricordate che un'equazione non è *sensata* se i due membri contengono oggetti diversi: le mele non potranno mai essere uguali alle pere, le lavatrici non potranno mai essere uguali ai gabbiani, i metri non potranno mai essere uguali ai chilogrammi al secondo.

L'**analisi dimensionale** è essenzialmente lo studio della struttura delle equazioni e della loro *sensatezza*, per così dire. Un'equazione è *dimensionalmente omogenea* se gli oggetti al primo membro sono uguali agli oggetti al secondo membro. Due quantità si dicono *commensurabili* se rappresentano la stessa grandezza: la massa di Giorgia e la massa della Terra sono quantità commensurabili, perché sono entrambe masse, mentre l'**altezza** di Giorgia e l'**età** di Giorgia non sono commensurabili, perché la **prima** grandezza è una **lunghezza** mentre la **seconda** grandezza è un **tempo**. **Le quantità commensurabili possono essere messe a confronto tramite equazioni o disequazioni**: ha un senso, ad esempio, dire che la massa di Giorgia è minore della massa della Terra:

$$m_{gio} < m_{terra} \tag{1.32}$$

Non ha alcun senso dire che l'altezza di Giorgia è minore della sua età:

$$h_{gio} < eta_{gio} \text{ (Disequazione non sensata)} \tag{1.33}$$

1.8.1 Quando è che una formula è vera?

Supponiamo che io vi dica che la velocità di un corpo è il rapporto tra l'accelerazione del corpo e la lunghezza del percorso che il corpo ha seguito fino a quel momento:

$$v = \frac{a}{l} \tag{1.34}$$

È una baggianata: è chiaro come il sole. Cosa c'entra la lunghezza del percorso fatto fino a un certo momento con la mia velocità attuale? Io vado alla velocità che mi pare! E cosa c'entra l'accelerazione? Se non accelero la mia velocità è nulla? È una follia!

Ma al di là di queste considerazioni *concettuali*, sempre opinabili, cerchiamo di fare delle considerazioni *matematiche*, inoppugnabili.

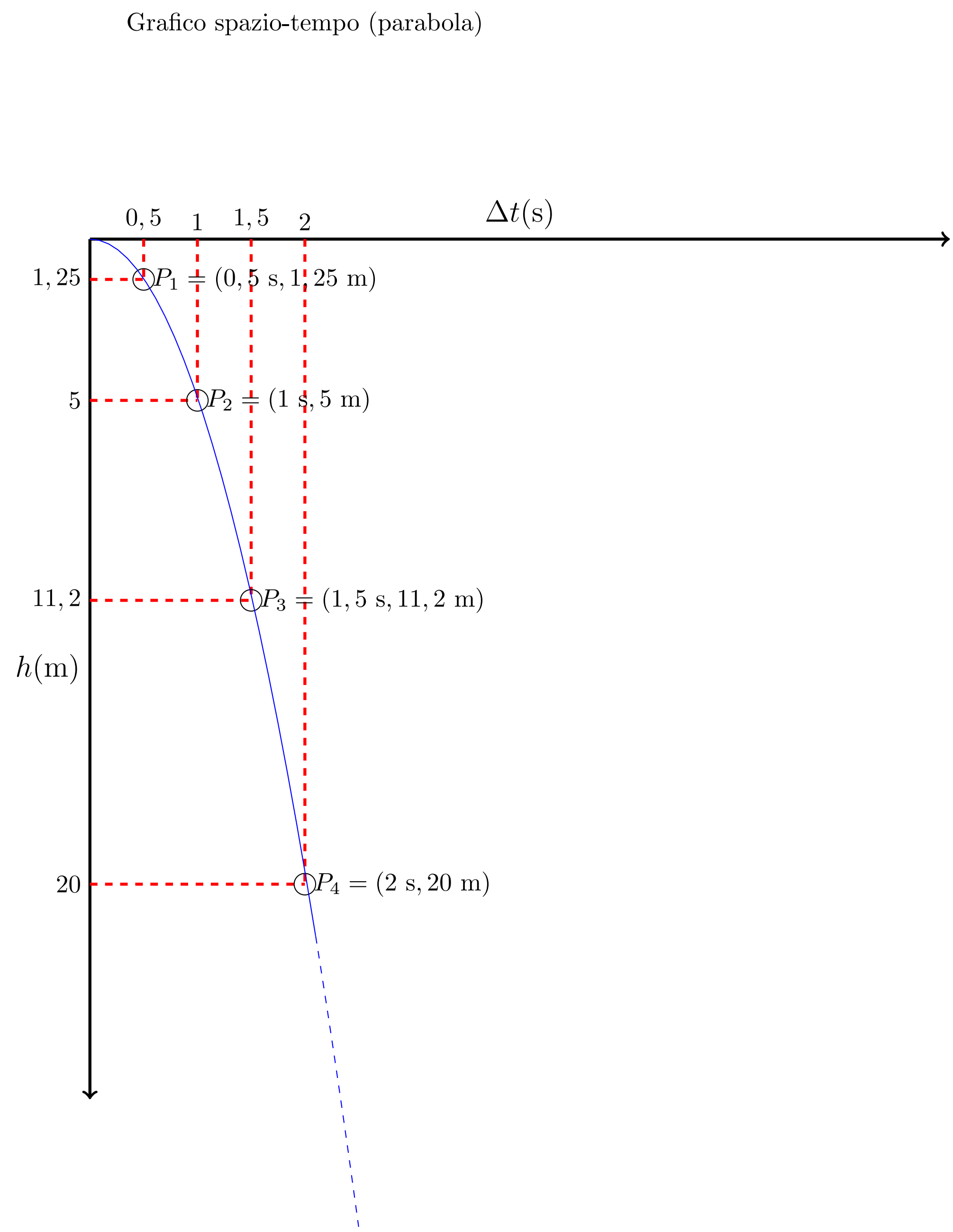


Figura 1.1: Grafico spazio-tempo di un corpo che cade. La figura rappresentata è una *parabola*. Le parabole più semplici hanno equazione $y = ax^2$, dove x e y sono delle variabili e a è un numero fisso. **Nel nostro caso**, l'equazione è $h = \frac{g}{2}\Delta t^2$: h e Δt sono le variabili e $\frac{g}{2}$ è un numero fisso.

Al primo membro abbiamo una velocità, la cui unità di misura è il metro al secondo. Al secondo membro abbiamo il rapporto tra un'accelerazione e una lunghezza. Queste due quantità possono essere uguali? **L'equazione è dimensionalmente omogenea**, ovvero *sensata*? Per capirlo scriviamo l'**equazione dimensionale associata**, ovvero un'equazione che contiene solo le **unità di misura** dei termini presenti nella formula 1.34. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{\mathrm{m}} \\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2\,\cancel{\mathrm{m}}} \\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \frac{1}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{1.35}$$

1.8.2 Metodo alternativo

L'equazione dimensionale associata è falsa perché le unità di misura al primo membro sono diverse da quelle presenti al secondo membro. Concludiamo che l'equazione 1.34 non è sensata.

È possibile scrivere le equazioni dimensionali anche in un altro modo, senz'altro più comodo e intuitivo. I passaggi per impostarle correttamente sono i seguenti:

1. Individuare le grandezze fisiche presenti nell'equazione originaria.
2. Sostituire ai termini presenti nell'equazione originaria delle lettere che indicano la *grandezza fisica* che rappresentano.
3. Le grandezze fisiche si indicano con le lettere le seguenti:
   (a) L, che sta per ≪lunghezza≫
   (b) M, che sta per ≪massa≫
   (c) t, che sta per ≪tempo≫
   (d) T, che sta per ≪temperatura≫
4. Le grandezze fisiche vanno poste tra parentesi quadre.

Riprendendo l'equazione 1.34, si ottiene la seguente *equazione dimensionale associata*:

$$\frac{[L]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2 \cdot [L]} \tag{1.36}$$

<u>Attenzione</u>: le equazioni dimensionali associate hanno delle proprietà particolari. Supponiamo di voler verificare l'omogeneità dell'equazione sottostante:

$$\vec{P_f} = \vec{P_i} + \vec{S} \tag{1.37}$$

L'equazione dimensionale associata è la seguente:

$$[L] = [L] + [L] \tag{1.38}$$

Questa equazione è vera, perché la somma di due lunghezze è di nuovo una lunghezza. **Fate attenzione, quindi**, perché la somma nelle equazioni dimensionali non si comporta come la somma nelle equazioni numeriche a cui siete abituati. **Le stesse considerazioni valgono per la differenza**. Infatti, l'equazione dimensionale associata alla formula per trovare la posizione iniziale ($vecP_i = \vec{P_f} - \vec{S}$) è la seguente:

$$[L] = [L] - [L] \tag{1.39}$$

ed è vera, perché la differenza tra due lunghezze è a sua volta una lunghezza.

1.8.3 Considerazioni finali

Facciamo un breve riassunto dei concetti fondamentali dell'analisi dimensionale.

1. Per verificare se una formula può essere vera è opportuno scrivere l'equazione dimensionale associata.
2. È possibile scrivere l'equazione dimensionale sia tramite le unità di misura, sia tramite delle lettere che indichino le grandezze (delimitate da parentesi quadre). **La seconda scelta è più opportuna e più comoda**.
3. Se l'equazione dimensionale associata è vera, allora la formula di partenza *può essere vera*, ma non è detto che lo sia. Ad esempio, non è vero che lo spostamento è la somma della posizione iniziale e della posizione finale ($\vec{S} \neq \vec{P_i} + \vec{P_f}$), ma l'equazione dimensionale associata è vera.
4. Se l'equazione dimensionale associata è falsa, la formula *non è sensata*, ed è quindi sempre falsa (il primo e il secondo membro sono *incommensurabili*).

1.9 Calcoli con le frazioni

Uno dei prerequisiti per gestire efficacemente l'analisi dimensionale è l'abilità nel gestire le frazioni.

Prima di tutto, in linea di massima, è sempre opportuno avere **<u>una</u>** sola linea di frazione nelle espressioni che calcoliamo, in modo tale che il significato delle formule sia comprensibile rapidamente. Nel caso in cui nelle nostre espressioni sia presente più di una linea di frazione dobbiamo trovare delle tecniche per far sparire le linee di frazione in eccesso.

In questa sezione studieremo la semplificazione delle seguenti tre espressioni:

1. Rapporto tra frazione e numero: $\frac{(\frac{a}{b})}{c}$
2. Rapporto tra numero e frazione: $\frac{a}{(\frac{b}{c})}$
3. Rapporto tra due frazioni: $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})}$

1.9.1 Precisazioni sulla linea di frazione

È importante fare una premessa cruciale, in modo tale che tanti dubbi riguardanti le frazioni siano rapidamente fugati. Supponiamo di avere un'espressione di questo tipo:

$$a \cdot b \cdot \frac{c}{pg} \tag{1.40}$$

Tale espressione può essere scritta in molti modi diversi:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot \frac{c}{pg} &= \frac{1}{pg} \cdot a \cdot b \cdot c \\ &= \frac{a \cdot b}{g} \cdot \frac{c}{p} \\ &= \frac{a}{g} \cdot \frac{b}{p} \cdot c \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c}{gp} \\ &= \frac{b \cdot c \cdot a}{gp} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Tutte queste rappresentazioni sono valide e corrette. Infatti, **se vi capita un'espressione che contiene solo prodotti tra numeri e frazioni** allora potete effettuare numerose operazioni di manipolazione, tra le quali si annoverano le seguenti:

1. Scambio dell'ordine dei termini presenti al numeratore o al denominatore (proprietà commutativa del prodotto):
$$\frac{a \cdot b \cdot c}{gp} = \frac{a \cdot c \cdot b}{pg}$$
2. Eliminazione della linea di frazione sottostante ai termini al numeratore:
$$\frac{a \cdot b \cdot c}{gp} = a \cdot \frac{b \cdot c}{gp}$$
3. Isolamento dei termini al numeratore tramite una frazione il cui numeratore è 1 (l'elemento neutro del prodotto):
$$\begin{aligned}\frac{a \cdot b \cdot c}{gp} &= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot 1}{gp} \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{gp}\end{aligned} \tag{1.42}$$

1.9.2 Semplificazione e moltiplicazione per 1

Prima di studiare le tre espressioni prese in esame è opportuno ripassare brevemente il concetto di *semplificazione* di una frazione.

La semplificazione è un'operazione che probabilmente effettuate in modo quasi automatico: quando vedete un fattore uguale al numeratore e al denominatore lo eliminate. Per esempio:
$$\begin{aligned}\frac{30}{2} &= \frac{15 \cdot 2}{2} \\ &= \frac{15 \cancel{2}}{\cdot \cancel{2}} \\ &= 15\end{aligned} \tag{1.43}$$

Questa operazione può essere eseguita perché il rapporto tra due numeri uguali è uguale a 1. **Il numero 1 è l'elemento neutro del prodotto**: moltiplicare un numero per 1 non ne modifica il valore.

Se la semplificazione è un'operazione intuitiva, quasi automatica, **lo stesso non vale per la moltiplicazione per 1**, la cui comprensione risulta più ostica. Tuttavia, **la moltiplicazione per 1 è equivalente alla semplificazione ed è altrettanto utile**. Vediamone un'applicazione.

Supponiamo di voler trasformare la frazione $\frac{30}{2}$ in modo tale che il denominatore sia 10. **Per farlo posso moltiplicare la frazione per 1**. Sapendo che voglio ottenere un denominatore uguale a 10 e sapendo che il mio denominatore attuale è 2, **dovrò moltiplicare il denominatore per 5** per raggiungere il mio scopo:
$$\begin{aligned}\frac{30}{2} &= \frac{30}{2} \cdot 1 \\ \frac{30}{2} &= \frac{30}{2} \cdot \frac{5}{5} \\ \frac{30}{2} &= \frac{30 \cdot 5}{2 \cdot 5} \\ \frac{30}{2} &= \frac{150}{10}\end{aligned} \tag{1.44}$$

1.9.3 Rapporto tra frazione e numero

In questo paragrafo studieremo la semplificazione delle espressioni che contengono una frazione divisa per un numero. Si tratta del caso più semplice. Infatti, vale la seguente equazione:
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \tag{1.45}$$
Facciamo un esempio numerico. Assegnando un valore alle lettere ($a = 30$,$b = 3$ e $c = 5$) otteniamo:
$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} &= \frac{\left(\frac{30}{3}\right)}{5} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2\end{aligned} \tag{1.46}$$

Ma è anche vero che:
$$\begin{aligned}\frac{a}{b \cdot c} &= \frac{30}{5 \cdot 3} \\ &= \frac{30}{15} \\ &= 2\end{aligned} \tag{1.47}$$

L'equazione 1.45 è abbastanza intuitiva e la sua dimostrazione è piuttosto complicata, quindi non vale la pena illustrarla.

1.9.4 Rapporto tra numero e frazione

La gestione del rapporto tra numero e frazione è decisamente meno intuitiva. Vale la seguente equazione:

$$\frac{a}{\frac{b}{(\frac{-}{c})}} = \frac{a \cdot c}{b} \tag{1.48}$$

Proviamo a dimostrarla tramite la moltiplicazione per 1. **Per eliminare la seconda linea di frazione, quella più in basso, siamo costretti a moltiplicare il denominatore per** c. Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\frac{b}{(\frac{-}{c})}} &= \frac{a}{\frac{b}{(\frac{-}{c})}} \cdot 1 \\ &= \frac{a}{\frac{b}{(\frac{-}{c})}} \cdot \frac{c}{c} \\ &= \frac{a}{\frac{b}{(\frac{-}{\cancel{c}})}} \cdot \frac{c}{\cancel{c}} \\ &= \frac{a}{b} \cdot c \\ &= \frac{a \cdot c}{b} \end{aligned} \tag{1.49}$$

1.9.5 Rapporto tra due frazioni

Giungiamo infine al rapporto tra due frazioni. Sappiamo che vale la seguente identità:

$$\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{1.50}$$

Per dimostrarla, come al solito, è sufficiente utilizzare la moltiplicazione per 1. **In questo caso abbiamo addirittura 3 linee di frazione**, per cui dobbiamo eliminarne 2. Per eliminare le 2 linee di frazione più in basso è sufficiente moltiplicare il denominatore (ovvero l'intera frazione $\frac{c}{d}$) per il suo reciproco (ovvero $\frac{d}{c}$). Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} &= \frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} \cdot 1 \\ &= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{(\frac{d}{c})}{(\frac{d}{c})} \\ &= \frac{\frac{a}{b}}{\cancel{\frac{c}{d}}} \cdot \frac{(\frac{d}{c})}{(\cancel{\frac{d}{c}})} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \\ &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \end{aligned} \tag{1.51}$$

1.10 Nozioni base sulle radici quadrate

In alcune formule (ad esempio quella per determinare il tempo di caduta) vi siete imbattuti nelle radici quadrate. **È opportuno che sappiate gestirle un po'**, in modo tale che i calcoli e le dimostrazioni risultino quanto più semplici possibile.

In buona sostanza, **le radici quadrate si comportano come potenze**. Vediamo perché. Senza dubbio, sapete che per definizione la radice quadrata di un numero elevata al quadrato è uguale al numero stesso:

$$(\sqrt{a})^2 = a \tag{1.52}$$

dove a è un numero reale positivo o uguale a 0 ($a \in \mathbb{R}+$). Facciamo un esempio. La radice quadrata di 9 è 3. Se eleviamo 3 al quadrato riotteniamo 9:

$$\begin{aligned} \sqrt{9} &= 3 \\ (\sqrt{9})^2 &= 9 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Senz'altro conoscete anche le proprietà delle potenze. Sapete, ad esempio, che vale la seguente formulina:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} \tag{1.54}$$

Facciamo un esempio. Se eleviamo 2 al quadrato e poi alla quinta otteniamo:

$$(2^2)^5 = 2^{10} \tag{1.55}$$

La formula 1.54 ci è molto utile per capire come funzionano le radici quadrate. Ipotizziamo che la radice quadrata possa essere scritta come potenza ($\sqrt{a} = a^p$: ovviamente già so che è vero!). L'equazione 1.52 può essere vista come segue:

$$(\sqrt{a})^2 = a^1 \tag{1.56}$$

Ma se la radice quadrata può essere vista come potenza otteniamo:

$$(a^p)^2 = a^1 \tag{1.57}$$

Quindi:

$$a^{2p} = a^1 \tag{1.58}$$

I due esponenti devono essere uguali affinché l'equazione sia verificata:

$$2p = 1 \tag{1.59}$$

Per cui si ottiene:

$$p = \frac{1}{2} \tag{1.60}$$

Concludiamo quindi che **estrarre la radice quadrata di un numero equivale a elevare quel numero alla potenza** $\frac{1}{2}$. **Se non mi credete o non vi fidate provate a effettuare questa operazione con la calcolatrice**: calcolate la radice quadrata di 3 sia tramite l'apposito simbolo sia elevando 3 alla potenza 0,5 e confrontate i risultati.

1.10.1 Conclusioni importanti

Possiamo intuire che **le radici quadrate si comportano come le potenze**: rispettano le stesse proprietà. In particolare, valgono le seguenti equazioni:

1. Prodotto di radici quadrate: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

   È analogo al prodotto di potenze con lo stesso esponente: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

2. Rapporto di radici quadrate: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

   È analogo al quoziente di potenze con lo stesso esponente: $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$

Vale inoltre la seguente identità (che chiameremo *razionalizzazione*):

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \tag{1.61}$$

dove x è un numero reale positivo qualsiasi ($x \in \mathbb{R}+$). Dimostriamo questa identità utilizzando la moltiplicazione per 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned} \tag{1.62}$$

Se non lo sapeste, un'*identità* è un'equazione sempre vera, laddove è definita.

1.11 Formulario (seconda interrogazione)

Se vi becco con questo formulario in circostanze non appropriate si verificheranno episodi alquanto spiacevoli.

1. Caduta libera
   1.1. Velocità iniziale nulla
      1.1.1 Altezza: $h = \dfrac{g \cdot \Delta t^2}{2}$
      1.1.2 Tempo di caduta: $\Delta t = \sqrt{\frac{2\text{ h}}{g}}$
      1.1.3 Velocità finale: $v_f = g \cdot \Delta t$
   1.2. Velocità iniziale non nulla
      1.2.1 Altezza: $h = \mathrm{v}_i \Delta t + \dfrac{g \cdot \Delta t^2}{2}$
      1.2.2 Tempo di caduta: $\Delta t = \dfrac{-\mathrm{v}_i + \sqrt{v_i^2 + 2\text{ h} \cdot \mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$
      1.2.3 Velocità finale: $v_f = v_i + g \cdot \Delta t$
2. Decelerazione causata dall'attrito viscoso: $a_{avis} = \dfrac{\mathrm{d} \cdot \mathrm{C}_d \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{v}^2}{2\ m}$.
3. Forza di attrito viscoso: $F_{avis} = m \cdot a_{avis}$
4. Definizione di newton: $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
5. Frazioni:
   5.1. Rapporto tra frazione e numero: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$
   5.2. Rapporto tra numero e frazione: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \cdot c}{b}$
   5.3. Rapporto tra due frazioni: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$
6. Radici quadrate:
   6.1. Prodotto di radici quadrate: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
   6.2. Rapporto di radici quadrate: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
   6.3. Razionalizzazione: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

1.12 Esercizi (seconda interrogazione)

1. Attrito viscoso (solo IB scientifico)
   1.1. Trova la decelerazione dovuta all'attrito viscoso agente su un foglio di carta di massa 10 g, coefficiente di drag $C_d = 1$, di lati lunghi 20cm e 40cm che cade nell'aria ($d_{aria} = 1,22\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). Supponi che il foglio cada a una velocità $v = 1,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. [$a_{avis} \approx 9,56\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, poco meno dell'accelerazione di gravità!]
   1.2. Trova la decelerazione dovuta all'attrito viscoso agente su una bottiglia d'olio di massa 1 kg, area di base 25 cm^2, e coefficiente di drag $C_d = 1$ che cade nell'aria. Supponi che la velocità della bottiglia sia la stessa del foglio [$a_{avis} \approx 0,003\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, minuscola!]
2. Caduta libera con velocità iniziale nulla
   2.1. Lasci cadere una palla di massa $0,7$ kg dalla finestra di casa tua. Determina lo spazio che la palla ha percorso dopo $0,1$ s, $0,2$ s, $0,3$ s e $0,5$s dalla caduta. Traccia un grafico spazio-tempo con i dati ottenuti (metti in ascissa il tempo e in ordinata lo spazio percorso). [$h(0,1\text{ s}) \approx 0,05$ m]
   2.2. Effettua lo stesso esercizio ipotizzando che l'evento si svolga su Marte ($g = 3,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) [$h(0,1\text{ s}) \approx 0,02$ m]
   2.3. Effettua lo stesso esercizio ipotizzando che l'evento si svolga sul pianeta Squallcomb, il cui raggio è 3000 km e la cui massa è $2 \cdot 10^{23}$kg [$g = 1,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $h(0,1\text{ s}) \approx 0,007$ m]
   2.4. Trova il tempo che una pera di massa $0,2$ kg impiega a raggiungere il fondo di un pozzo profondo 5hm se lasciata cadere [$\Delta t \approx 10$ s]
   2.5. Lascia cadere (in modo sicuro) un oggetto (possibilmente biodegradabile) da un palazzo alto. Cronometra il tempo che impiega l'oggetto a cadere per stimare l'altezza del palazzo.
3. Caduta libera con velocità iniziale qualsiasi
   3.1. Lanci una palla di massa $0,4$ kg dalla finestra di casa tua verso l'alto, con $v_i = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina lo spazio che la palla ha percorso dopo $0,1$ s, $0,2$ s, $0,3$ s e $0,5$s dal lancio. Traccia un grafico spazio-tempo con i dati ottenuti (metti in ascissa il tempo e in ordinata lo spazio percorso). [$h(0,1\text{ s}) \approx -0,35$ m, ovvero 35cm verso l'alto]
   3.2. Lanci una palla di massa $0,4$ kg dalla finestra di casa tua verso il basso, con $v_i = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina lo spazio che la palla ha percorso dopo $0,1$ s, $0,2$ s, $0,3$ s e $0,5$s dal lancio. Traccia un grafico spazio-tempo con i dati ottenuti (metti in ascissa il tempo e in ordinata lo spazio percorso). [$h(0,1\text{ s}) \approx 0,45$ m, cioè 45 centimetri verso il basso]
   3.3. Trova il tempo che una mela di massa $0,2$ kg impiega a raggiungere il fondo di un pozzo profondo 5hm se scagliata verso il basso con una velocità $v_i = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. [$\Delta t \approx 9$ s]
   3.4. Trova il tempo che una mela di massa $0,2$ kg impiega a raggiungere il fondo di un pozzo profondo 5hm se lanciata inizialmente verso l'alto con una velocità $v_i = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. [$\Delta t \approx 11$ s]
4. Analisi dimensionale
   4.1. Dimostra che la seguente equazione è dimensionalmente omogenea:
   $$h = v_i \cdot \Delta t + \frac{g \cdot \Delta t^2}{2} \tag{1.63}$$
   4.2. Affermo che la forza peso che agisce su una palla è uguale alla densità della palla moltiplicata per il raggio R della palla alla terza per l'accelerazione di gravità:
   $$F_p(\text{palla}) = d \cdot R^3 \cdot g \tag{1.64}$$
   Puoi negare questa affermazione falsa usando l'analisi dimensionale?
   4.3. Dimostra che la seguente equazione è dimensionalmente omogenea:
   $$a_{avis} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d} \cdot \mathrm{C}_d \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{v}^2}{m} \tag{1.65}$$
5. Calcolo con le frazioni
   5.1. Trasforma l'espressione $F_1 = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{4}$ in una frazione semplice (con una sola linea di frazione) [$F_1 = \frac{3}{28}$]
   5.2. Trasforma l'espressione $F_2 = \frac{9}{\left(\frac{3}{7}\right)}$ in una frazione semplice [$F_2 = \frac{63}{3}$]
   5.3. Trasforma l'espressione $F_3 = \frac{\left(\frac{15}{31}\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)}$ in una frazione semplice [$F_3 = \frac{30}{217}$]
   5.4. Il rapporto tra una velocità e un'accelerazione è un tempo. Dimostralo con la formula del rapporto tra due frazioni.
6. Radici quadrate
   6.1. Dimostra che l'equazione $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ è dimensionalmente omogenea [impostate l'equazione dimensionale associata: dovete usare il rapporto tra un numero e una frazione e poi estrarre la radice quadrata]
   6.2. Dimostra che l'equazione$\Delta t = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g}$ è dimensionalmente omogenea [impostate l'equazione dimensionale associata: prima verificate che sotto radice avete una velocità al quadrato, estraete la radice e poi dividete la velocità per l'accelerazione utilizzando il rapporto tra frazioni]
   6.3. Con la calcolatrice verifica che valgono le seguenti uguaglianze (non è inutile come sembra: serve a fissare le idee)
   6.3.1 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
   6.3.2 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
   6.3.3 $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$
   6.3.4 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Sezione 2

Statica

La statica è la branca della meccanica che studia l'*equilibrio* dei corpi. Ricordiamo che **la meccanica è la branca della fisica che studia il moto e l'equilibrio dei corpi** soggetti a forze.

2.1 Definizione di equilibrio

Si dice che un corpo è in equilibrio se la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \text{ N} \tag{2.1}$$

dove il simbolo $\sum$ è una lettera greca, il *sigma*, e sta a indicare una somma (il sigma corrisponde alla nostra «s», che è la lettera iniziale della parola «somma»). La lettera presente sotto al simbolo di sommatoria, ovvero «i», è detta *indice*. Tale indice assume valori che vanno da «1» a n, dove n è un numero naturale. L'equazione 2.1 si legge: «la somma per i che va da uno a enne delle forze, associate all'indice i, è uguale a zero newton». Vediamo un esempio. Scrivendo la seguente formula:

$$\sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i = 0 \text{ N} \tag{2.2}$$

affermerei che la somma delle forze F_1,F_2,F_3, F_4 e F_5 è nulla. L'equazione 2.2 si legge: «la somma per i che va da uno a cinque delle forze, associate all'indice i, è uguale a zero newton». Infatti, il simbolo di sommatoria può essere riscritto come segue:

$$\sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 \tag{2.3}$$

2.2 Sommatorie

Il simbolo di sommatoria è molto comodo perché ci permette di scrivere lunghe somme con pochissimi simboli. Vediamo un altro esempio per capire meglio. **Supponiamo di voler scrivere con un unico simbolo la somma dei primi 15 numeri naturali**. Potremo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{15} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 \tag{2.4}$$

Se volessimo scrivere la somma dei primi 10 numeri pari, invece, potremmo effettuare la seguente scelta:

$$\sum_{i=1}^{10} 2i = 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+2\cdot8+2\cdot9+2\cdot10 \tag{2.5}$$

2.3 Tipologie di equilibrio

Ricordiamo che per il primo principio della dinamica, se un corpo è soggetto a forze che si annullano a vicenda, non accelera (si veda il paragrafo 1.5.1). Se un corpo non accelera avrà certamente una velocità sempre uguale. Questa velocità può essere uguale a zero oppure diversa da zero.

Nel caso in cui questa velocità sia nulla si parla di equilibrio *statico*. Nel caso in cui questa velocità non sia nulla si parla di equilibrio *dinamico*. **Ad esempio, se vi siedete su un divano siete in equilibrio statico**, perché siete fermi. **Se invece scivolate sul ghiaccio siete in equilibrio dinamico**, perché avete sempre la stessa velocità (l'attrito è debole) ma non siete fermi.

È chiaro che lo studio dei corpi in equilibrio statico è assai importante: basti pensare che tutti gli edifici costruiti nella storia (templi, arene, teatri, palazzi, condomini, torri, chiese, cattedrali, moschee, pagode) sono o sono stati in equilibrio statico (**altrimenti sarebbero crollati**). È importante fare sì che gli edifici che costruiamo rimangano in equilibrio statico anche in caso di sollecitazioni (**terremoti, burrasche, crolli parziali**). Lo stesso vale per le statue: idealmente, esse non si devono deformare né rompere sotto l'azione di sollecitazioni (il famoso Colosso di Rodi crollò a causa di un terremoto circa 65 anni dopo la sua costruzione). In generale, **se si desidera che un qualsiasi artefatto rimanga permanentemente in una certa posizione, bisogna studiarne la statica**.

Noi studieremo brevemente il problema del corpo in equilibrio posto su un piano inclinato: si tratta del problema più semplice e più istruttivo, come introduzione.

2.4 Il piano inclinato

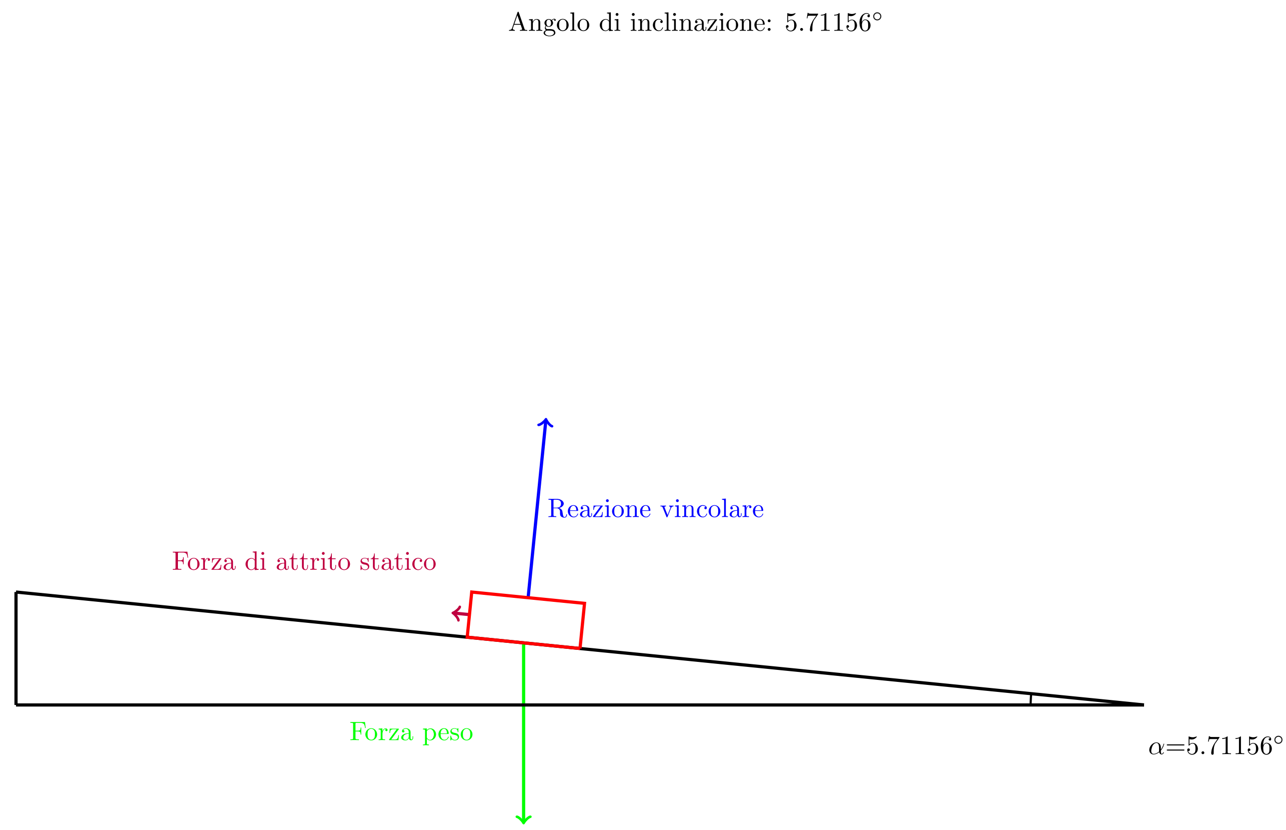


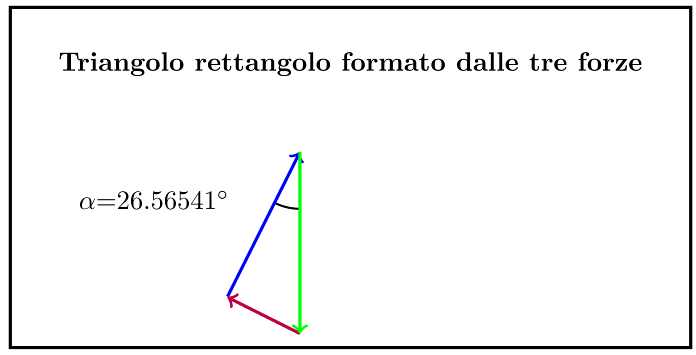
Figura 2.1: Piano inclinato con inclinazione molto bassa (pari a meno di 6°)

Il piano inclinato è una particolare configurazione geometrica. Esso può essere rappresentato tramite un triangolo rettangolo, la cui inclinazione può variare. **L'inclinazione è definita dall'angolo α: maggiore è questo angolo, maggiore è l'inclinazione** (si confrontino le figure 2.1 e 2.2, per esempio).

Sul piano inclinato può essere posto un corpo, che nelle figure è rappresentato come un rettangolo rosso. **Tale corpo è soggetto a tre forze**: la *reazione vincolare*, la *forza di attrito statico* e la *forza peso*, le cui caratteristiche sono le seguenti:

1. La forza peso non dipende dall'inclinazione del piano, né per quanto riguarda il verso né per quanto riguarda l'intensità. Infatti, la forza peso è sempre diretta verso il centro della Terra, e la sua intensità e sempre data dall'equazione $F_p = mg$.

2. La **reazione vincolare** dipende dall'inclinazione del piano. La reazione vincolare si manifesta quando un corpo rigido cerca di attraversare un altro corpo rigido. **Tale reazione impedisce l'attraversamento del piano da parte del rettangolo rosso**. L'intensità e il verso della reazione vincolare *dipendono* dall'inclinazione del piano. Infatti, la reazione vincolare è sempre perpendicolare al piano inclinato, ed è più intensa se l'inclinazione è minore.



Angolo di inclinazione: 26.56541°

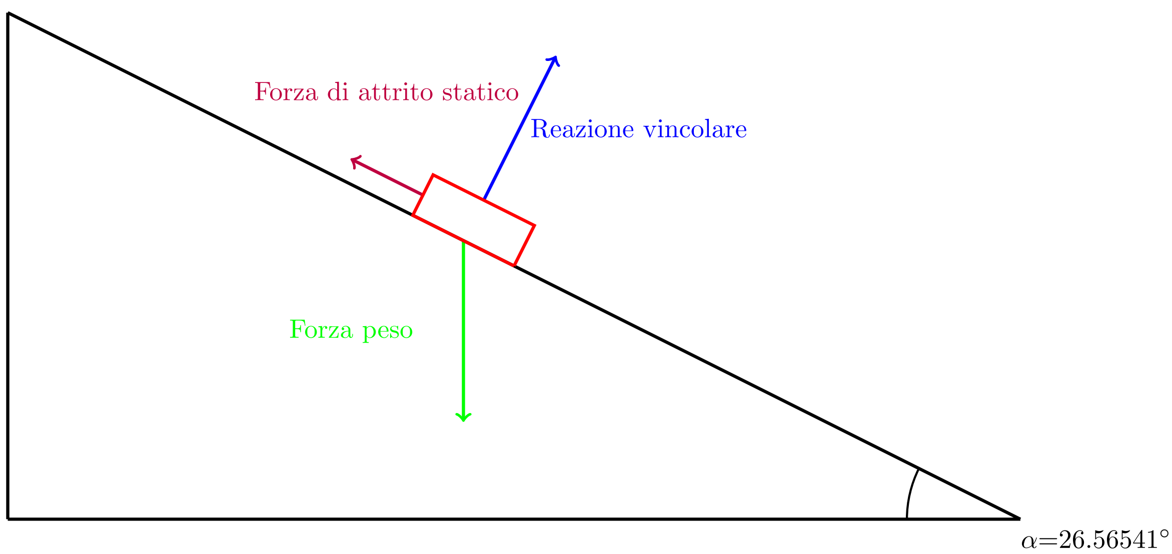


Figura 2.2: Piano inclinato con inclinazione bassa (pari a circa 26°)

3. La forza di attrito statico dipende dall'inclinazione del piano. Questa forza, infatti, è parallela al piano inclinato e ostacola lo scorrimento del rettangolo rosso. L'intensità della forza di attrito statico è maggiore se l'inclinazione è maggiore. **La forza di attrito statico non può superare un certo valore soglia**, perché se il piano è troppo inclinato il corpo non riesce più ad ≪aggrapparsi≫: il valore massimo che la forza di attrito statico può avere è dato dal prodotto della forza che preme contro al piano (indicata con $F_\perp$, letteralmente *forza perpendicolare* al piano) e il coefficiente di attrito statico (μ_{stat}):

$$F_{max}(\text{a stat}) = F_\perp \cdot \mu_{stat} \tag{2.6}$$

Il coefficiente di attrito statico può essere radente e volvente, ed è *maggiore* del coefficiente di attrito che abbiamo visto **quando abbiamo trattato la dinamica (che si manifesta quando un corpo è in moto).**

2.5 I valori delle tre forze

Le tre forze che agiscono sul corpo posto su un piano inclinato formano un perfetto **triangolo rettangolo**, la cui ipotenusa è la forza peso (si veda la figura 2.2, in alto a destra). Noi conosciamo sempre l'intensità della forza peso, perché è data dal prodotto della massa del corpo per l'accelerazione di gravità ($F_p = mg$). **Per risolvere il problema del piano inclinato** è necessario trovare l'intensità di tutte e tre le forze in gioco.

Per trovare l'intensità dell'attrito e della reazione vincolare dobbiamo essere capaci di **trovare i cateti di un triangolo conoscendo l'ipotenusa e il valore di uno degli angoli**. A questo scopo dobbiamo ricorrere a due *funzioni*, chiamate seno e coseno.

2.6 Seno e coseno

Il seno e il coseno *di un angolo* sono due numeri, compresi tra 0 e 1, che moltiplicati per l'ipotenusa danno i due cateti. **Il prodotto della lunghezza dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo dà come risultato la lunghezza del cateto adiacente all'angolo**, mentre **il prodotto della lunghezza dell'ipotenusa per il seno dell'angolo dà come risultato la lunghezza del cateto opposto all'angolo**:

$$C_{ad} = I\cos(\alpha)$$
$$C_{opp} = I\sin(\alpha)$$

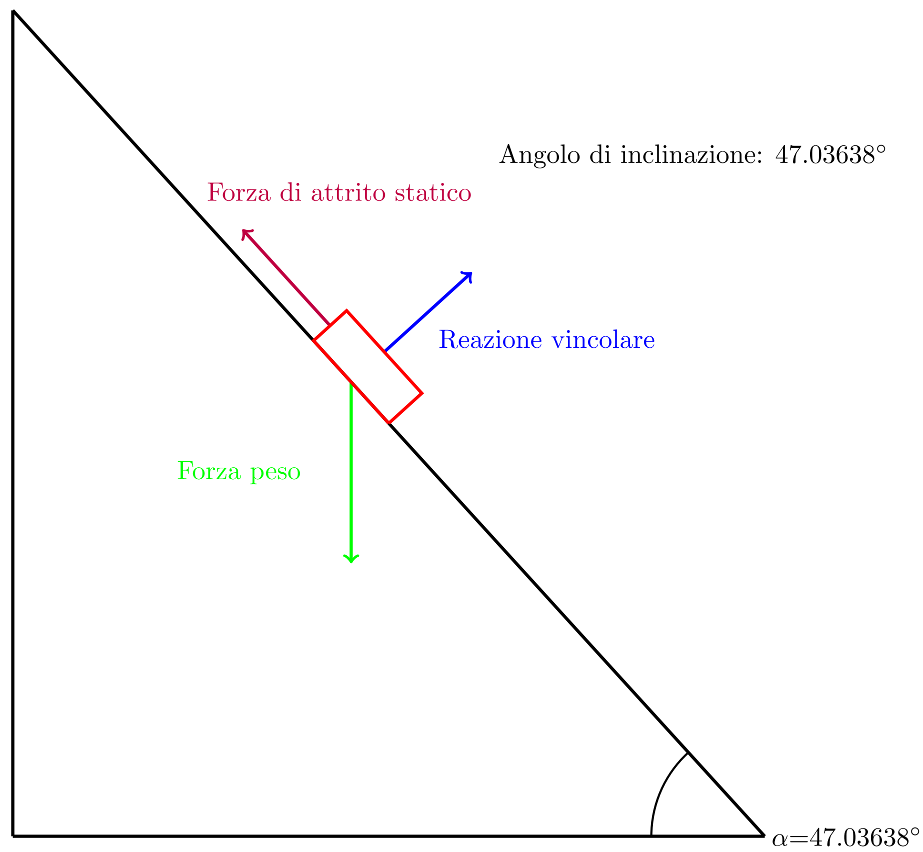


Figura 2.3: Piano inclinato con inclinazione intermedia (pari a circa 47°)

Non porta da nessuna parte chiedersi come il seno e il coseno possano essere rappresentati sul grafico, perché è impossibile rappresentare il seno e il coseno di un angolo, se non in situazioni speciali che studierete negli anni a venire. In termini molto informali, **il seno e il coseno sono solo dei numeri per ≪far tornare i calcoli≫**: abbiamo la lunghezza dell'ipotenusa, abbiamo l'angolo, vogliamo trovare i cateti, e in nostro soccorso arrivano seno e coseno. **In generale**, **il coseno di un angolo è molto grande se l'angolo di inclinazione è basso**. Viceversa, **il seno di un angolo è molto grande se l'angolo di inclinazione è molto alto**. Infatti, **se l'angolo di inclinazione è basso, il cateto adiacente all'angolo sarà molto lungo, e di conseguenza il coseno sarà grande**. Viceversa,**il seno sarà grande se il cateto opposto all'angolo è lungo, ovvero quando l'inclinazione è elevata** (si osservi ad esempio la figura 2.5)

Il ragionamento per definire seno e coseno è il seguente: sappiamo che la lunghezza del cateto è direttamente proporzionale a quella dell'ipotenusa: se raddoppiamo la lunghezza dell'ipotenusa, raddoppia anche quella dei cateti. **Il rapporto tra i cateti e l'ipotenusa è quindi sempre costante, e le costanti di proporzionalità prendono il nome di seno e coseno**:

$$\frac{C_{ad}}{I} = \cos(\alpha)$$
$$\frac{C_{opp}}{I} = \sin(\alpha)$$

Seno e coseno dipendono solo dall'angolo di inclinazione e non da altre caratteristiche del triangolo. **Seno e coseno di un angolo** sono in generale numeri estremamente rognosi, difficili da afferrare e calcolare, dato che esistono sostanzialmente per ≪far tornare le cose≫. Esistono delle formule per calcolare seno e coseno di un angolo *in modo approssimativo* senza ricorrere alla calcolatrice. **Per angoli piccoli** si possono usare le seguenti:

$$\sin(\alpha) \approx \frac{\pi}{180}\alpha$$
$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{(\frac{\pi}{180}\alpha)^2}{2}$$

dove α è l'angolo di inclinazione e π è il pi greco.

2.7 Forza di attrito e reazione vincolare

Osservando la figura 2.2 si nota che l'angolo di inclinazione è adiacente alla reazione vincolare e opposto alla forza di attrito statico, mentre l'ipotenusa è la forza peso. Considerando la reazione vincolare come ≪cateto adiacente≫ e la forza di attrito statico come ≪cateto opposto≫ otteniamo le seguenti equazioni:

$$R_{vinc} = F_p \cos(\alpha) \tag{2.7}$$
$$F_{a\ stat} = F_p \sin(\alpha) \tag{2.8}$$

osserviamo che la forza perpendicolare al piano, $F_{\perp}$, è proprio la reazione vincolare. **Ricordiamo che la forza di attrito statico non può superare il valore $F_{\perp}\mu_{stat} = F_p \cos(\alpha)\mu_{stat}$,** perché in caso contrario il corpo comincia a scivolare.

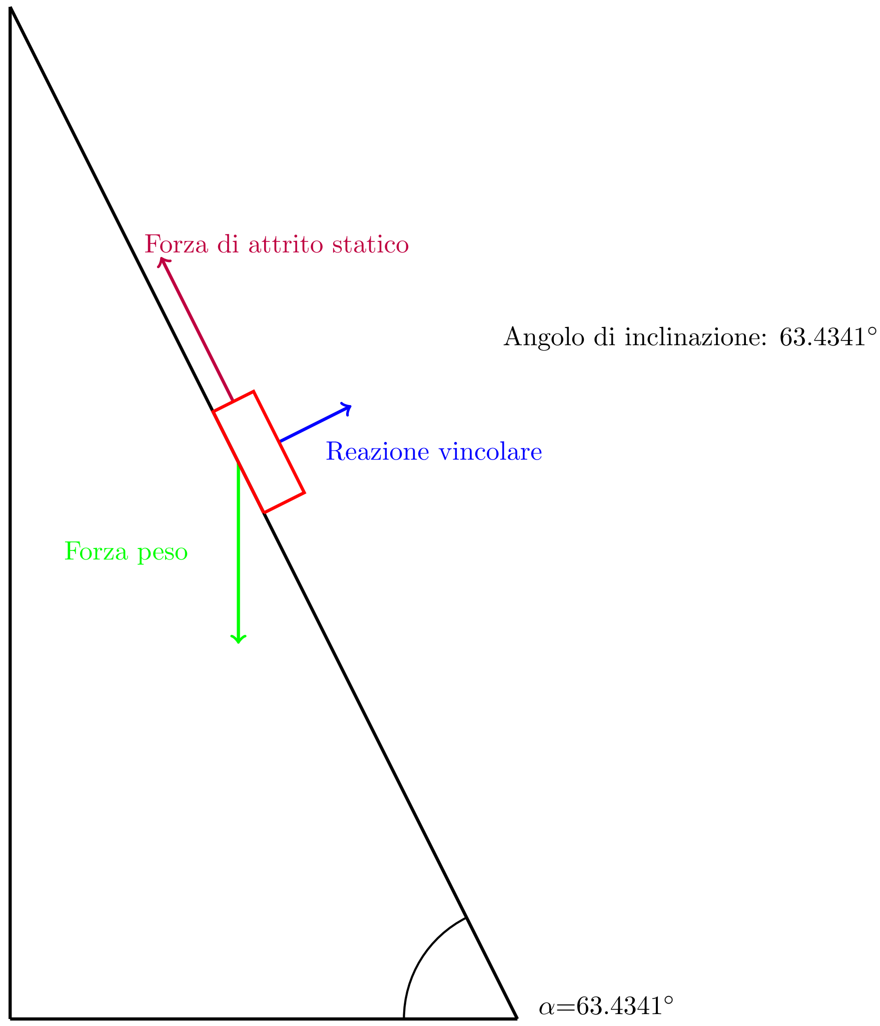


Figura 2.4: Piano inclinato con inclinazione elevata (pari a circa 63°)

2.8 Esercizi

1. Secondo te, seno e coseno sono associati a grandezze o sono numeri puri? Sfrutta l'analisi dimensionale per rispondere.
2. Osserva le cinque figure presenti in questo testo. Supponendo che tu ti trovi sulla Terra e sapendo che la massa del rettangolo rosso è $m_{rett} = 5$ kg, determina il valore della forza peso, della reazione vincolare e della forza di attrito statico in tutti e cinque i casi. Per determinare seno e coseno utilizza sia la calcolatrice sia la formula fornita dal docente e confronta i risultati.
3. Ripeti l'esercizio supponendo di trovarti su Marte, dove $g = 3,7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
4. Supponendo che il coefficiente di attrito statico del rettangolo sia pari a 1, determina in quale delle cinque situazioni illustrate il rettangolo scivola (**suggerimento: calcola il valore limite della forza di attrito statico e confrontalo con il valore che ottieni con l'equazione 2.8. Se il valore che ottieni con l'equazione 2.8 è maggiore del valore limite il corpo scivolerà**).

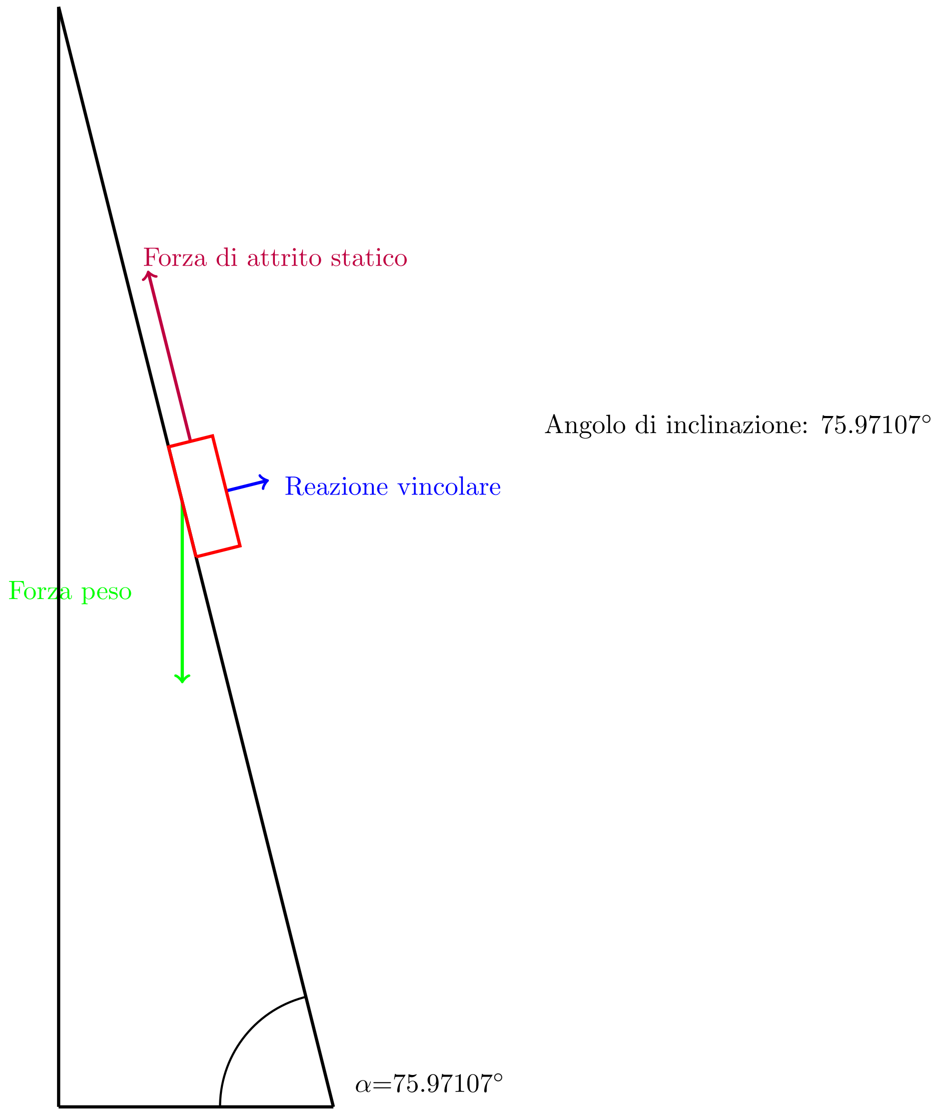


Figura 2.5: Piano inclinato con inclinazione molto elevata (pari a circa 76°)

2.9 Alfabeto greco

Questo breve paragrafo è dedicato all'uso delle lettere dell'alfabeto greco in fisica e in matematica. L'uso è spiegato nella tabella 2.1.

Non è stato spiegato il significato di tutti i simboli, perché ancora non potete comprenderlo. **Quando il docente ritiene che voi non possiate comprendere il significato del simbolo, in tabella è stato scritto ≪si omette≫**: questo non significa che il simbolo non sia utilizzato in fisica e in matematica, ma significa che ancora non potete capire *per cosa* si usa.

Laddove troviate scritto ≪N.D.≫ il docente intende comunicarvi che l'uso del simbolo non è attestato, oppure che lo è con bassissima frequenza.

Alfabeto greco						
Ordinale	Simbolo (minuscolo)	Simbolo (maiuscolo)	Nome	Come si pronuncia?	Uso (minuscola)	Uso (maiuscola)
1	α	A	Alfa	*a*	Angoli	**N.D.**
2	β	B	Beta	*b*	Angoli	**N.D.**
3	γ	Γ	Gamma	*g*	Angoli	**Si omette**
4	δ	Δ	Delta	*d*	**Si omette**	Variazioni, intervalli
5	ε	E	Epsilon	*e* chiusa	Piccole quantità	**N.D.**
6	ζ	Z	Zeta	*z*	**Si omette**	**N.D.**
7	η	H	Eta	*e* aperta	**Si omette**	**N.D.**
8	θ	Θ	Theta	*t* aspirata	Angoli	**Si omette**
9	ι	I	Iota	*i*	**N.D.**	**N.D.**
10	κ	K	Kappa	*k*	**N.D.**	**N.D.**
11	λ	Λ	Lambda	*l*	Lunghezza delle onde	**Si omette**
12	μ	M	My	*m*	Coefficiente di attrito	**N.D.**
13	ν	N	Ny	*n*	Frequenze (radio ecc.)	**N.D.**
14	ξ	Ξ	Xi	*x*	**Si omette**	**Si omette**
15	o	O	Omicron	*o* chiusa	**N.D.**	**N.D.**
16	π	Π	Pi	*p*	Pi greco	**Si omette**
17	ρ	P	Rho	*r*	Densità	**N.D.**
18	σ	Σ	Sigma	*s*	**Si omette**	Sommatorie
19	τ	T	Tau	*t*	**Si omette**	**N.D.**
20	υ	Υ	Ypsilon	*i* con labbra arrotondate	**Si omette**	**Si omette**
21	ϕ	Φ	Fi (phi)	*p* aspirata	Angoli	**N.D.**
22	χ	X	Chi	*c* aspirata	**Si omette**	**N.D.**
23	ψ	Ψ	Psi	*ps*	**Si omette**	**Si omette**
24	ω	Ω	Omega	*o* aperta	**Si omette**	Resistenza nei circuiti

Tabella 2.1: Alfabeto greco. Per ora, sono illustrati i significati di 14 simboli soltanto.