Trasferimento radiativo e integrali impropri

Iacopo Sbrolli

13 maggio 2019

Capitolo 1

Trasferimento radiativo

Il trasferimento radiativo è la disciplina che studia gli scambi di energia luminosa tra i corpi.

Tutti i corpi emettono energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, anche se talvolta questa radiazione può risultare invisibile ai nostri occhi. **L'intensità della radiazione emessa da un corpo è legata alla sua temperatura**

In generale, per capire se la radiazione emessa da un corpo è visibile oppure no è possibile utilizzare la *legge di Wien*. La legge di Wien lega **la lunghezza d'onda associata al picco di radiazione emessa da un corpo** alla sua temperatura:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} \cdot T &= k_\lambda \\ \lambda_{max} &= \frac{k_\lambda}{T} \\ T &= \frac{k_\lambda}{\lambda_{max}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $k_\lambda = 2,897 \cdot 10^{-3}\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}$ è la costante di Wien, mentre T è la temperatura **espressa in kelvin**. In generale, se $380\mathrm{nm} < \lambda_{max} < 740\mathrm{nm}$, la radiazione emessa dal corpo **ha un picco nel visibile**. Infatti, alla lunghezza d'onda di 380 nm è associato il violetto, mentre alla lunghezza d'onda di 740 nm è associato il rosso.

Cerchiamo ora di capire se i corpi con cui abbiamo a che fare normalmente possono emettere radiazione visibile. Ipotizzando che la temperatura dell'ambiente sia circa 16,6 °C, esprimendola in kelvin otteniamo un valore pari a 289,75 K. Sostituendo tale valore nella formula per trovare λ_{max} otteniamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{2,897 \cdot 10^{-3}\cancel{\mathrm{K}}\mathrm{m}}{289,75\cancel{\mathrm{K}}} \\ &\approx 10^{-5}\mathrm{m} \\ &\approx 10.000\mathrm{nm} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Il valore che otteniamo è nettamente superiore ai 750 nm del rosso, per cui la luce emessa dai corpi con cui abbiamo a che fare normalmente è invisibile: **si tratta di luce infrarossa**.

1.1 Lunghezza d'onda e frequenza

La lunghezza d'onda e la frequenza di un'onda luminosa sono legate da una semplice equazione:

$$c = \lambda\nu \tag{1.3}$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ è la velocità della luce, λ è la lunghezza d'onda e ν è la frequenza. L'equazione vale, intuitivamente, **perché la frequenza è il reciproco del periodo**, e la velocità dell'onda è il rapporto tra la lunghezza percorsa (la lunghezza d'onda) e il tempo necessario a percorrerla (il periodo).

Esiste una legge di Wien anche per la frequenza, che è la seguente:

$$\nu_{max} = k_\nu T, \quad k_\nu = 5,88 \cdot 10^{10}\frac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{K}} \tag{1.4}$$

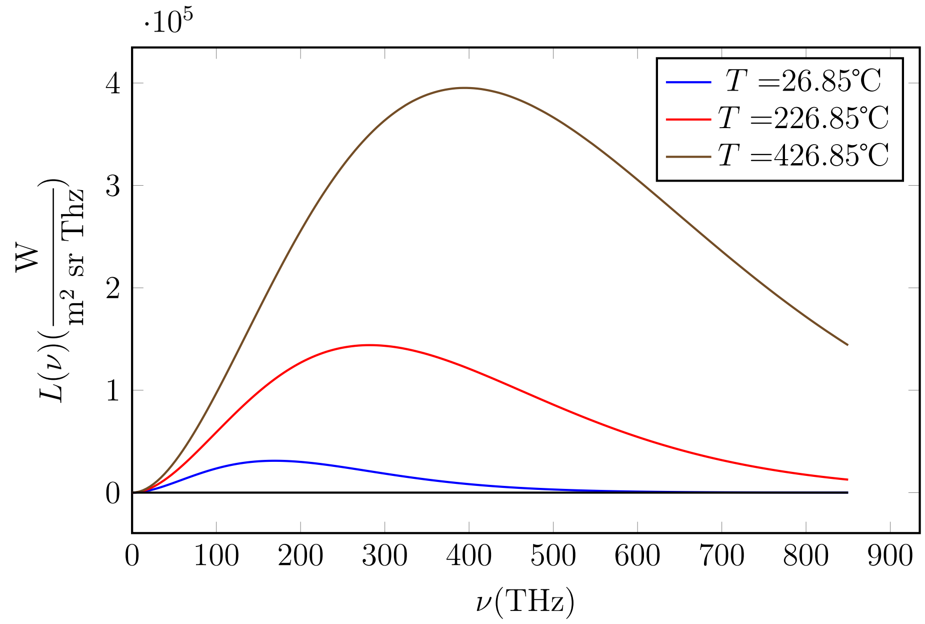

Figura 1.1: Figura che rappresenta la radianza di corpo nero emessa da tre corpi neri aventi temperature di 300, 500 e 700 kelvin (che equivalgono a circa 27, 227 e 427 ℃). La frequenza in ascissa è espressa in terahertz (migliaia di miliardi di hertz). **Si noti che le curve relative a temperature diverse non si toccano**

1.2 Legge di Planck del corpo nero

Uno dei principali lavori che portò alla formulazione della meccanica quantistica fu lo studio della *radiazione di corpo nero*, ovvero dell'emissione di raggi luminosi di un corpo causata unicamente dalla sua temperatura.

1.2.1 Definizione di corpo nero

Un corpo è considerato «nero» se assorbe tutta la radiazione incidente: si può dimostrare che un *corpo nero*, se è in equilibrio termico, emette tanta radiazione quanta ne assorbe. Infatti, se il corpo nero emettesse meno radiazione di quanta ne assorbe la sua temperatura calerebbe. Se emettesse più radiazione di quanta ne assorbe la sua temperatura salirebbe. **Affinché la temperatura del corpo nero non vari esso deve emettere tanta radiazione quanta ne assorbe**: il colore dei corpi neri non è quindi veramente il nero, ma varia a seconda della loro temperatura. Li definiamo «neri» solo perché «mangiano» tutta la luce che incide su di loro.

L'emissione di corpo nero esiste perché **la temperatura è legata alle oscillazioni degli atomi che compongono la materia**. **Gli atomi sono composti da particelle cariche**: se gli atomi oscillano producono campi elettrici e magnetici, che si manifestano sotto forma di luce. Più rapidamente oscillano, **maggiore sarà la loro frequenza e minore sarà la loro lunghezza d'onda**. È chiaro che se un atomo oscilla più rapidamente esso emetterà una radiazione più energetica: **i raggi luminosi sono quindi più energetici se la loro frequenza è maggiore e la loro lunghezza d'onda è minore**. I raggi viola sono più energetici dei raggi rossi. **I raggi ultravioletti sono più energetici dei raggi viola**, mentre **i raggi infrarossi sono meno energetici dei raggi rossi**.

Planck dimostrò che la distribuzione di *radianza* [1] per unità di frequenza emessa da un corpo avente una certa temperatura è data dalla seguente formula:

$$L(T,\nu) = \frac{k_2\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{1.5}$$

dove $k_2 = 4,65 \cdot 10^{-52}\frac{\mathrm{Js}^3}{\mathrm{m}^2}$ è una costante, h è la costante di Planck (che vale circa $6,63 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$), k è la costante di Boltzmann (che vale circa $1,38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$), ν è la frequenza dell'onda e T è la temperatura del corpo. **In termini matematici, a voi più familiari, potremmo scrivere**:

$$y = \frac{k_2x^3}{e^{k_1x}-1} \tag{1.6}$$

[1] Nei paragrafi successivi viene spiegato che cos'è la radianza in relazione all'energia totale emessa da un corpo esteso.

1.2.2 Breve compendio storico

Prima di Planck, utilizzando ragionamenti legati alla meccanica classica, era stata trovata la seguente formula:

$$L(T, \nu) = k_3 T \cdot \nu^2 \tag{1.7}$$

Chiaramente, l'integrale da 0 a ∞ della funzione definita dall'equazione 1.7 è infinito, per cui ci si trovò di fronte a un paradosso: i corpi, indipendentemente dalla loro temperatura, dovevano emettere energia infinita.

Il paradosso è stato risolto da Planck, il quale «sfoltì» il numero di energie realmente associate ai *fotoni* [2]. Infatti, egli asseriva che l'energia associata a un *fotone* dipendeva dalla frequenza, e doveva esserne un multiplo intero:

$$E(n, \nu) = nh\nu,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

dove h è la costante di Planck. È chiaro che se le frequenze sono molto alte, le possibili energie associate al fotone sono molto «diradate». Ad esempio, se la frequenza è $\nu_{es} = 10^{50}$Hz si ottiene:

$$E(n) = n \cdot 6,63 \cdot 10^{14}\text{J}, n \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

Le energie che possono essere associate alla frequenza ν_{es} sono le seguenti:

$$\begin{aligned} E(1) &= 6,63 \cdot 10^{14}\ \text{J} \\ E(2) &= 1,326 \cdot 10^{15}\ \text{J} \\ E(3) &= 1,989 \cdot 10^{15}\ \text{J} \end{aligned} \tag{1.10}$$

e così via. **Dato che è molto improbabile che un fotone abbia energie così alte**, ne vengono emessi pochissimi nella realtà. Prima di Planck, invece, **si pensava che a *ogni* frequenza potesse essere associata una *qualsiasi* energia** (indipendentemente dal valore della frequenza stessa): anche fotoni con una frequenza pari a ν_{es} potevano essere associati **a energie molto basse, che hanno un'elevatissima probabilità di essere emessi**. È questo il motivo per cui l'energia totale emessa dai corpi neri risultava infinita.

1.3 Studio della legge di Planck: massimo e integrale

Due caratteristiche importanti della legge di Planck sono il massimo e l'integrale: il massimo rappresenta la frequenza a cui viene emessa più luce, mentre l'integrale rappresenta la radiazione totale emessa dal corpo.

1.3.1 Massimo

Per determinare il massimo della funzione 1.6 è necessario calcolare la derivata e porla uguale a zero. **Compito tutt'altro che semplice**:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3k_2x^2}{e^{k_1x}-1} - \frac{k_2x^3}{(e^{k_1x}-1)^2} \\ 0 &= \frac{3k_2x^2}{e^{k_1x}-1} - \frac{k_2x^3}{(e^{k_1x}-1)^2} \\ 0 &= 3 - \frac{x}{e^{k_1x}-1} \\ 3(e^{k_1x}-1) &= k_2x \end{aligned} \tag{1.11}$$

Otteniamo **un'equazione trascendente** [3], per voi non risolubile, la cui soluzione è **la legge di Wien**.

[2] Il termine «fotone» fu introdotto successivamente alle scoperte di Planck, avvenute nel 1900.

[3] Le equazioni trascendenti sono tali se coinvolgono funzioni trascendenti (esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente).

1.3.2 Integrale

È possibile calcolare un integrale *improprio* per trovare la quantità totale di radiazione emessa da un corpo avente una certa temperatura:

$$L_{tot} = \int_0^\infty \frac{k_2 x^3}{e^{k_1 x} - 1} dx \tag{1.12}$$

La funzione integranda **non possiede una primitiva elementare** [4] ma è possibile calcolare in modo *esatto* l'integrale improprio. Il risultato è il seguente:

$$L_{tot} = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \tag{1.13}$$

dove $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}^4 \mathrm{m}^2}$ è la costante di Stefan-Boltzmann. **Tramite questa semplice equazione** possiamo trovare la radiazione totale emessa da un punto della superficie di un corpo. Abbiamo scoperto che la radianza è legata alla potenza *quarta* della temperatura: raddoppiando la temperatura la radiazione totale emessa aumenta di 16 volte. **Ma che cos'è la radianza?**

1.4 Grandezze radiometriche

Le grandezze radiometriche sono delle grandezze fisiche legate alla luce emessa da un corpo. La quantità radiometrica più familiare è la potenza (o *luminosità*: sono sinonimi): si tratta dell'energia totale emessa da un corpo in un certo intervallo di tempo.

$$P = \frac{E}{\Delta t} \tag{1.14}$$

Un'altra utile quantità radiometrica è *l'irradianza*: si tratta della potenza emessa o ricevuta da una superficie diviso l'area di tale superficie. **Si ipotizza, in questa formula, che la superficie che riceve la radiazione sia perpendicolare alla radiazione stessa**.

$$I = \frac{P}{S} \tag{1.15}$$

L'irradianza è un importante indice per determinare quanta luce riceve un certo luogo sulla superficie terrestre. Conoscere l'irradianza media di un luogo può essere utile per capire se vale la pena o meno installare dei pannelli solari.

L'ultima quantità radiometrica che definiamo è **la radianza**: si tratta dell'irradianza emessa o ricevuta da un punto per unità di angolo solido.

$$L = \frac{I}{\Omega} \tag{1.16}$$

dove Ω è l'angolo solido. **In termini molto informali, la radianza quantifica la luce ricevuta da una certa direzione o emessa in una certa direzione**.

Si sottolinea infine che le grandezze radiometriche possono essere associate a radiazione *emessa*, *riflessa* e *assorbita*.

1.4.1 Angoli solidi

Gli angoli solidi sono gli analoghi tridimensionali degli angoli piani, con cui avete a che fare normalmente. Per definire l'angolo solido supponiamo di avere una sfera, provvista di un centro sul quale si trova il vertice di un cono. **L'angolo solido associato al cono, per definizione, è il rapporto tra la porzione di sfera intersecata dal cono e il raggio della sfera al quadrato**:

$$\Omega = \frac{P_{sfera}}{r_{sfera}^2} \tag{1.17}$$

dato che la superficie totale della sfera è $4\pi r^2$, l'angolo solido può raggiungere un valore massimo pari a 4π *steradianti*. Gli steradianti sono indicati con il simbolo «sr».

[4] Una funzione elementare è una combinazione di esponenziali, logaritmi, seni, coseni, funzioni goniometriche inverse, polinomi tramite somme, sottrazioni, prodotti e rapporti

1.5 Potenza emessa da un corpo

Per calcolare la potenza totale emessa da un corpo avente una certa temperatura è necessario utilizzare le definizioni di radianza, irradianza e potenza e combinarle. **Dato che la legge di Planck fornisce la radianza**, per trovare la potenza è necessario moltiplicare la radianza per l'angolo solido associato all'emissione e la superficie del corpo che emette la radiazione.

Supponiamo di voler calcolare la potenza emessa da un corpo sferico. **L'angolo solido** associato all'emissione di un punto qualsiasi di tale corpo dovrebbe essere 2π, cioè la metà di una sfera: infatti, il punto del corpo può emettere in tutte le direzioni che non causino un ritorno del raggio all'interno della sfera. **Tuttavia, l'emissione non perpendicolare al corpo è meno efficiente**, per cui l'angolo solido «effettivo» è soltanto pari a π (non è agevole giustificare questo passaggio, per cui la dimostrazione è omessa). La superficie della sfera è pari a $4\pi r^2$, dove r è il raggio della sfera. Per un corpo sferico è quindi valida la seguente equazione:

$$\begin{aligned} P &= L \cdot \Omega \cdot S \\ &= L \cdot \pi \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{\sigma}{\pi} T^4 \cdot \pi \cdot \pi r^2 \\ &= \sigma T^4 \cdot \pi r^2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.6 Esercizi

1. Trova la lunghezza d'onda massima emessa da un corpo che abbia una temperatura di 100 °. Si tratta di luce visibile?
2. Trova il colore di un corpo la cui temperatura è pari a 10000 kelvin.
3. Trova la lunghezza d'onda associata alla frequenza 10^{15}Hz.
4. Determina $\lim_{\nu \to 0} L(T, \nu)$ e $\lim_{\nu \to \infty} L(T, \nu)$. Disegna la curva planckiana (la radianza) associata a una temperatura di 3000K tramite queste informazioni. Utilizza l'equazione 1.4 per trovare il massimo della funzione.
5. Determina l'unità di misura della costante di Planck studiando l'equazione 1.8. Ricorda che le unità di misura a destra dell'uguale devono essere le stesse presenti a sinistra dell'uguale.
6. Trova la potenza emessa da una lampadina il cui filamento è lungo 1 cm, spesso 2 mm e la cui temperatura è 3000 K (supponi che l'angolo solido sia π).
7. Sapendo che il blu è associato a una lunghezza d'onda di 450 nm, determina la temperatura di una stella blu e la luminosità totale che emette, sapendo che il raggio di una stella blu è circa 3 milioni di chilometri.

Capitolo 2

Integrali indefiniti

Il calcolo di un integrale definito equivale al calcolo dell'area sottostante al grafico di una funzione. Per effettuare questo calcolo è necessario trovare la cosiddetta *primitiva* della funzione integranda. Infatti, tramite **il teorema fondamentale del calcolo integrale** è possibile dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\frac{\mathrm{d}(\int_k^x f(t)dt)}{\mathrm{dx}} = f(x) \tag{2.1}$$

dove k è un numero qualsiasi. In pratica, **la derivata dell'area rispetto all'estremo di integrazione è la funzione integranda**. Per determinare il valore dell'area sottostante al grafico di una funzione $f(x)$ è sufficiente dunque capire quale è la funzione $F(x)$ che, se derivata, mi restituisce $f(x)$.

2.1 Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale

Prima di cominciare, si sottolinea che **la dimostrazione presentata in questa sezione è informale**.

2.1.1 Introduzione

Il ragionamento è il seguente. Ipotizziamo di voler calcolare l'area sottostante a una curva. **Dato che la curva è continua, per effettuare un calcolo preciso è necessario spezzettarla in un numero molto elevato di rettangoli e poi sommare l'area dei singoli rettangoli**. Un esempio di questa procedura è fornito nella figura 2.1, dove è illustrata la procedura grafica per calcolare l'area sottostante a una parabola di equazione $f(x) = x^2$.

Nell'esempio riportato nel grafico, l'area della parabola è stata approssimata tramite la somma di alcuni rettangoli rossi. **La base dei rettangoli ha sempre lo stesso valore** (Δx), mentre **l'altezza dei rettangoli varia in base al valore che assume la funzione**. L'area dei rettangoli è data dal prodotto della loro base e della loro altezza:

$$A_{ret}(x) = \Delta x \cdot f(x)$$

dove Δx vale $0,5$ nel disegno. Ipotizziamo di voler calcolare l'area sottosante la parabola per x che va da 0 a 3. Otterremmo:

$$\begin{aligned} A_{tot} &= A_{ret}(0,5) + A_{ret}(1) + A_{ret}(1,5) + A_{ret}(2) + A_{ret}(2,5) + A_{ret}(3) \\ &= f(0,5) \cdot 0,5 + f(1) \cdot 0,5 + f(1,5) \cdot 0,5 + f(2) \cdot 0,5 + f(2,5) \cdot 0,5 + f(3) \cdot 0,5 \\ &= 11,375 \end{aligned} \tag{2.2}$$

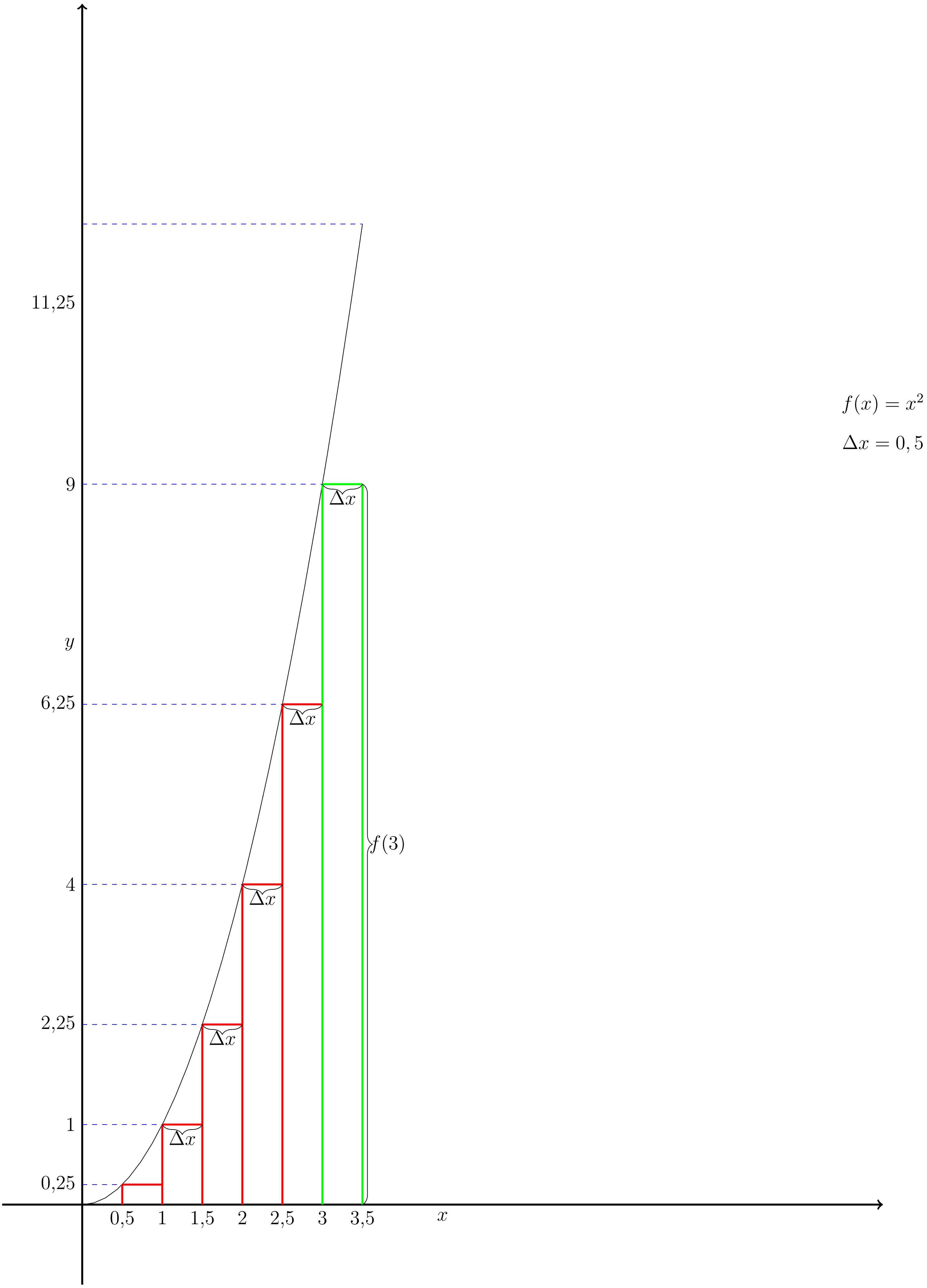

Figura 2.1: Rappresentazione grafica della procedura di integrazione della parabola di equazione $f(x) = x^2$. Un'approssimazione dell'area della parabola è data dalla somma delle aree dei rettangoli dal contorno rosso. **Il rettangolino verde è l'incremento di area**, utile per calcolare la derivata di $A(x)$. Ciascun rettangolo ha un'area pari a $\Delta x \cdot f(x)$, dove Δx è pari a $0, 5$ nel grafico

2.1.2 Derivata dell'area

La derivata, per definizione, è il limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale.

Dimostrare che **la derivata dell'area è uguale al valore che la funzione integranda assume in un certo punto** è un gioco da ragazzi, se si ragiona in modo informale. **Prendiamo l'esempio della sezione precedente** e dimostriamo che la derivata dell'area nel punto $x = 3$ è proprio uguale a $f(3)$.

L'area da 0 a 3 è così definita:

$$\begin{aligned} A(3) &= A_{ret}(0,5) + A_{ret}(1) + A_{ret}(1,5) + A_{ret}(2) + A_{ret}(2,5) + A_{ret}(3) \\ &= f(0,5)\cdot\Delta x + f(1)\cdot\Delta x + f(1,5)\cdot\Delta x + f(2)\cdot\Delta x + f(2,5)\cdot\Delta x + f(3)\cdot\Delta x \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'area da 0 a 2,5 è così definita:

$$\begin{aligned} A(2,5) &= A_{ret}(0,5) + A_{ret}(1) + A_{ret}(1,5) + A_{ret}(2) + A_{ret}(2,5) \\ &= f(0,5)\cdot\Delta x + f(1)\cdot\Delta x + f(1,5)\cdot\Delta x + f(2)\cdot\Delta x + f(2,5)\cdot\Delta x \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo bisogno di calcolare la differenza tra le due aree, che è la seguente:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(3) - A(2,5) \\ &= f(3)\cdot\Delta x \end{aligned} \tag{2.5}$$

in pratica, **l'incremento di area è il rettangolino più a destra nel grafico**, quello verde, la cui base va da $x = 2,5$ a $x = 3$. Si tratta dell'ultimo rettangolino che aggiungiamo: per questo è l'«incremento».

Il rapporto incrementale è il rapporto tra l'incremento di $A(x)$ e l'incremento di x, ovvero:

$$R = \frac{\Delta A}{\Delta x} \tag{2.6}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta A}{\Delta x} \\ &= \frac{f(3)\cdot\Delta x}{\Delta x} \\ &= f(3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.3 Generalizzazione

Abbiamo mostrato che il rapporto incrementale tra l'area e l'incremento Δx è uguale al valore che la funzione integranda assume nell'estremo di integrazione. **Abbiamo dimostrato l'uguaglianza senza effettuare il limite per $\Delta x \to 0$**. Verificheremo che il nostro risultato è indipendente dal valore di Δx, per cui sarà automaticamente vero anche per $\Delta x \to 0$.

Supponiamo di voler calcolare l'area della nostra parabola da 0 a 3 utilizzando una suddivisione in rettangoli più fitta della precedente, quindi con $\Delta x < 0,5$. L'area sottostante la funzione per x che va da 0 a 3 sarà data dalla seguente formula:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} f(n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \tag{2.8}$$

Dove N è il numero di intervalli in cui è stata suddivisa la funzione, e il simbolo $\sum_{n=1}^{N}$ rappresenta una sommatoria con l'indice n che varia da 1 a N. In pratica, l'equazione 2.8 ci dice che **l'area totale è data dalla somma delle singole aree**. Per esempio, se $\Delta x = 0,1$, è chiaro che il numero di intervalli è 30 (se integriamo da 0 a 3 con un passo pari a 0,1 abbiamo 30 intervalli). In questo caso otterremmo:

$$\begin{gathered} A(x) = \sum_{n=1}^{30} f(n\cdot 0,1)\cdot\Delta x \\ A(x) = f(0,1)\cdot\Delta x + f(0,2)\cdot\Delta x + f(0,3)\cdot\Delta x + ... \end{gathered} \tag{2.9}$$

Troviamo ora l'incremento di area. Come abbiamo visto nella sezione precedente, l'incremento di area coincide con l'area del rettangolino più a destra. In generale, l'area del rettangolino più a destra vale $f(x) \cdot \Delta x$. **Si tratta dell'ultimo addendo nella sommatoria definita dall'equazione 2.8**.

Con questa considerazione possiamo trovare la derivata dell'area:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Possiamo riassumere il teorema fondamentale del calcolo integrale in poche righe:«*per calcolare l'area sottostante a una funzione la suddividiamo in un grande numero di rettangoli. Il rapporto tra l'area del rettangolino più a destra e la sua base è uguale all'altezza del rettangolino. L'altezza del rettangolino è $f(x)$, indipendentemente dal valore della base Δx. Si può quindi dire che la derivata dell'area è uguale alla funzione integranda.*

2.2 Integrali indefiniti impropri

Avendo dimostrato che **la derivata dell'area è la funzione integranda**, possiamo sviluppare delle tecniche per calcolare le aree sottostanti a una funzione.

In questa sezione ci dedicheremo al calcolo delle aree in due condizioni particolari:

1. Uno degli estremi di integrazione è infinito: si parla in questo caso integrali impropri di prima specie.
2. La funzione integranda ha delle disconuità in coincidenza degli estremi di integrazione: in questo caso si parla di integrali impropri di seconda specie.

Un integrale improprio, ovviamente, può essere sia di prima che di seconda specie. **Definiremo «puri» gli integrali di prima specie che non sono anche di seconda specie, e viceversa**. **Il risultato di un integrale improprio può essere triplice**:

1. Un numero. In questo caso si dice che l'integrale improprio *converge*.
2. Un valore infinito. In questo caso si dice che l'integrale improprio *diverge*.
3. Un valore non definito. In questo caso di dice che l'integrale improprio *è indefinito* (che originalità, eh?)

È importante individuare i casi in cui gli integrali impropri convergono, divergono o sono indefiniti.

2.2.1 Integrali impropri di prima specie

Ci domandiamo quali integrali di prima specie convergano. **In questa sezione tratteremo gli integrali di prima specie «puri»**.

La condizione necessaria è la seguente: *il valore della funzione integranda $f(x)$ deve tendere a 0 per $x \to \infty$*:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \tag{2.11}$$

Ad esempio, siamo sicuri che:

$$\int_{x=1}^{\infty} x^2 = \infty \tag{2.12}$$

Infatti, il grafico della parabola non si avvicina costantemente all'asse delle ascisse, anzi, se ne allontana: è quindi impossibile che l'area sottostante a tale grafico sia finita.

È invece possibile che l'area sottostante alla funzione $y = \frac{1}{x}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, sia finita. Infatti, è valido il seguente limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}^n = 0 \tag{2.13}$$

Non è tuttavia sempre vero che gli integrali impropri di prima specie convergono se vale l'equazione 2.11. Infatti, il seguente integrale improprio diverge:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \frac{1}{x} dx \\ &= ln(\infty) - ln(1) \\ &= \infty - 0 \\ &= \infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

In linea generale, *un integrale improprio potrebbe convergere* se la funzione integranda decresce più rapidamente di $\frac{1}{x}$. In termini matematici, questo equivale alla seguente condizione:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Un esempio di funzione che decresce più rapidamente di $y_1 = \frac{1}{x}$ è $y_2 = \frac{1}{x^2}$. Infatti, per qualsiasi valore di $x > 1$, i valori di y_2 sono molto più bassi di quelli di y_1. Il limite dato dalla condizione definita nell'equazione 2.15 vale:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} xf(x) = \\ \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{x^2} = \\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

È dunque possibile che l'integrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converga. Bisogna tuttavia fare attenzione: non c'è questa garanzia. Infatti, se prendiamo la funzione $y_3 = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} xf(x) = \\ \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{x\ln(x)} = \\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

È dunque possibile che l'integrale improprio di prima specie associato alla funzione y_3 converga, ma non è così:

$$\begin{aligned} I &= \int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)} dx \\ &= \ln(\ln(\infty)) - \ln(\ln(e)) \\ &= \infty - \ln(1) \\ &= \infty - 0 \\ &= \infty \end{aligned} \tag{2.18}$$

In linea di massima, **si è sicuri che le seguenti funzioni danno integrali impropri di prima specie convergenti**:

1. $y = P_1(x)e^{-x}$, dove $P_1(x)$ è un polinomio qualsiasi. Esempio: $y = (x^2 + 37x + 3)e^{-x}$.
2. $y = \frac{1}{x^\alpha}$, dove α è un numero reale maggiore di 1. Esempio: $y = \frac{1}{x^{32}}$.
3. $y = P_1(x)e^{-P_2(x)}$, dove $P_2(x)$ è un polinomio i cui coefficienti sono positivi. Esempio: $y = (3x)e^{-(x^2+1)}$

Gli integrali impropri di prima specie sono sicuramente *indefiniti* se la funzione integranda è oscillante e l'equazione 2.15 è falsa. Ad esempio, l'integrale $\int_1^\infty \cos(x)$ è indefinito. Questo avviene perché sommiamo infinite aree positive e aree negative di valore identico, e non si può affermare in modo matematicamente non contraddittorio che le aree negative e le aree positive si equivalgono, né che le une prevalgono sulle altre.

2.2.2 Integrali impropri di seconda specie

Le considerazioni fatte per gli integrali impropri di prima specie valgono anche in questo caso. **Infatti, è sempre la funzione $\frac{1}{x}$ a fare da discriminante**. Un integrale improprio di seconda specie può convergere solo se nel punto di discontinuità la funzione integranda si avvicina all'infinito più lentamente della funzione $\frac{1}{x-x_0}$, dove x_0 è il punto di discontinuità:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{x-x_0}} &= 0 \\ \lim_{x\to x_0} (x-x_0)f(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Esempi di funzioni i cui integrali impropri di seconda specie sono convergenti sono i seguenti:

1. $y = \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$. Per queste funzioni, il punto di discontinuità è $x = x_0$, dove tali funzioni divergono. Il limite definito dall'equazione 2.19 è uguale a 0 solo se $0 < \alpha < 1$.

2. $y = P_1(x) \cdot \ln(x)$, dove $P_1(x)$ è un polinomio qualsiasi.

2.2.3 Notazione

È opportuno scrivere gli integrali impropri sotto forma di limite, in quanto infinito non è un numero. Ad esempio, sarebbe opportuno scrivere l'integrale improprio di prima specie della funzione $(x^2 - 9x + 7)e^{-x}$ con estremo inferiore uguale a 2 come segue:

$$\lim_{t\to\infty} \int_2^t (x^2 - 9x + 7)e^{-x} dx \tag{2.20}$$

2.3 Esercizi

1. Determina il valore dei seguenti integrali impropri di prima specie:
   (a) $\lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x\ln(x)^2} dx$
   (b) $\lim_{t\to\infty} \int_6^t (7x-2)e^{-x} dx$
   (c) $\lim_{t\to\infty} \int_{10}^t 2x\cos(x^2) dx$
   (d) $\lim_{t\to\infty} \int_1^t (x^2+9x+1)e^{-x} dx$
   (e) $\lim_{t\to\infty} \int_3^t xe^{-x^2} dx$

2. Determina il valore dei seguenti integrali impropri di seconda specie:
   (a) $\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x\ln(x)^2} dx$
   (b) $\lim_{t\to 0} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
   (c) $\lim_{t\to 3} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} dx$
   (d) $\lim_{t\to 1} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} dx$
   (e) $\lim_{t\to 0} \int_t^{10} xln(x) dx$

Per i risultati consultate Wolfram Alpha. La sintassi è la seguente:

integral from x=a to x=b f(x) dx

dove a è l'estremo inferiore, b è l'estremo superiore e f(x) è la vostra funzione integranda. Se l'estremo superiore è infinito scrivete «infinity» al posto di b.

2.4 Formulario

1. $\int e^x = e^x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$. Di solito, $f(x)$ è una funzione esponenziale o goniometrica, mentre $g(x)$ è una funzione che derivandosi si annulla (cioè un polinomio) oppure un logaritmo (nella classe dei logaritmi rientrano anche le funzioni goniometriche inverse).
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$
5. $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$
6. $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan(f(x)) + C$
7. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin(f(x)) + C$
8. $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos(f(x)) + C$
9. $\int f'(x)f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
10. $\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x dx = (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^x + C$, con $b_2 = a_2$, $b_1 = a_1 - 2b_2$, $b_0 = a_0 - b_1$.
11. $\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x} dx = -(b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{-x} + C$, con $b_2 = a_2$, $b_1 = a_1 + 2b_2$, $b_0 = a_0 + b_1$.