Relatività speciale

Iacopo Sbrolli

3 maggio 2019

Indice

,

Capitolo 1

Storia della relatività (riassunto)

La teoria della relatività non è stata formulata per caso. Le evidenze sperimentali e i passaggi teorici fatti prima dell'articolo *«Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento»* di Einstein (settembre 1905) furono numerosi:

1. Tra la fine del '600 e l'inizio del '700 si osservò il fenomeno dell'*aberrazione della luce* delle stelle. Infatti, apparentemente, **la posizione degli astri nel firmamento dipendeva dal verso del vettore velocità orbitale della Terra attorno al Sole**, che cambia durante l'anno. **Questo fenomeno fu spiegato in modo soddisfacente solo da Einstein nel 1905**. È chiaro che all'epoca gli scienziati non avevano alcuna cognizione di che cosa potesse essere la teoria della relativitià: ci si limitò a osservare il fenomeno e a darne una giustificazione di tipo «classico».

2. Christiaan Huygens formulò per primo una teoria *ondulatoria* della luce, ovvero una teoria che interpretava i raggi luminosi come onde e non come corpuscoli (particelle). **Tutte le onde si propagano attraverso un mezzo**: dato che la luce si propaga anche nel vuoto, si postulò l'esistenza di un mezzo detto *etere luminifero* nel 1690 [3]. Le teorie dell'etere luminifero spopolarono nel XIX secolo. **L'etere luminifero, a seconda della teoria, era considerato «immobile» o «parzialmente immobile»**. Nel primo caso caso, l'etere non poteva essere «trascinato» dai corpi celesti; nel secondo caso, invece, ciò poteva verificarsi.

3. Tramite l'esperimento di Fizeau del 1850 [2], **semplificando**, si osservò che **la velocità della luce in un flusso d'acqua** non è uguale alla somma della **velocità della luce nell'acqua ferma** e **la velocità del flusso d'acqua**.

4. Nel 1865, nell'articolo *La teoria dinamica del campo elettromagnetico* [4], James Clerk Maxwell osservò che le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, il cui valore è $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Le costanti $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ sono rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto. Fu quindi stabilita definitivamente una connessione tra luce e fenomeni elettromagnetici (già intuita 19 anni prima da Faraday).

5. Nel 1887, gli scienziati Albert Michelson e Edward Morley vollero dimostrare l'esistenza dell'etere misurando la velocità della luce *parallelamente* e *perpendicolarmente* al moto di rivoluzione della Terra. **L'etere (se non era trascinato) si sarebbe dovuto muovere parallelamente al moto della Terra (immaginate la Terra come una pallina immersa in acqua)**. **L'effetto avrebbe dovuto rallentare la luce, ma non fu osservato**. Si ipotizzò quindi che l'etere fosse trascinato dalla Terra.

6. Tra la fine dell'800 e l'inizio del '900 scienziati come Voigt, Larmor e Poincaré [5] elaborarono delle *trasformazioni* per portare le equazioni di Maxwell da un sistema di riferimento all'altro. **Queste trasformazioni, dal loro punto di vista, non contraddicevano la relatività galileiana**: gli effetti di «sfasamento temporale» venivano considerati soltanto apparenti e legati alle proprietà dell'etere e della luce.

7. Einstein, nel 1905 [1], giustificò tutti i risultati degli esperimenti fatti fino ad allora (aberrazione della luce, esperimento di Fizeau, esperimento di Michelson-Morley) e le peculiarità teoriche (incompatibilità tra trasformazioni galileiane ed equazioni di Maxwell) **postulando l'inesistenza dell'etere e accettando che le coordinate spaziali e temporali dipendevano dalla differenza di velocità tra gli osservatori**. Einstein affermava quindi che tutti i fenomeni osservati e descritti fino a quel momento non avevano nulla a che fare con l'elettromagnetismo, ma dipendevano dall'alterazione delle coordinate spazio-temporali.

Capitolo 2

Principi della relatività speciale

I principi della relatività speciale sono pochi, ovvero:

1. La velocità della luce, c, è la stessa in tutti i sistemi di riferimento.

2. Omogeneità temporale. Prendiamo due sistemi di riferimento: uno «in moto» (S) e uno «fermo» (S'). **Due eventi di uguale durata Δt nel sistema S corrisponderanno a due eventi di uguale durata $\Delta t'$ nel sistema S'.** Attenzione: $\Delta t' \neq \Delta t$, sempre.

3. Omogeneità spaziale. Nel sistema di riferimento S, due punti P_1 e P_2 **equidistanti da un punto centrale** P con distanza d, corrisponderanno a due punti P_1' e P_2' **equidistanti da un punto centrale** P' con distanza d'. Attenzione: $d' \neq d$, spesso.

Tramite questi pochi principi è possibile dimostrare le *trasformazioni di Lorentz* tra un sistema di riferimento e l'altro. **Una comparazione tra trasformazioni classiche galileiane e trasformazioni di Lorentz è fornita nella tabella 2.1**. **Le trasformazioni di Lorentz valgono solo per passare da un sistema di riferimento e *inerziale* all'altro (niente accelerazione)**: tutti i sistemi di riferimento presi in considerazione si muovono di moto rettilineo uniforme ($\vec{a} = 0$).

In tutti i nostri esempi, **il sistema di riferimento «in moto» è Nicola Sclano in automobile**, mentre **il sistema di riferimento «fermo» è Francesco Benocci sul ciglio della strada**. Le grandezze viste da Sclano non hanno l'apice ('), mentre quelle viste da Benocci ce l'hanno.

Trasformazioni galileiane				
	Posizione di un oggetto	Tempo	Velocità di un oggetto	Commento
Sistema «in moto» con velocità $\vec{u} = (u_x, 0)$	$\vec{P}_{ogg} = (x, y)$	t	$\vec{v}_{ogg} = (v_x, v_y)$	
Sistema «fermo»	$\vec{P'}_{ogg} = \vec{P}_{ogg} + \vec{u} \cdot t$	$t' = t$	$\vec{v'}_{ogg} = \vec{u} + \vec{v}_{ogg}$	Il tempo è assoluto. La posizione e la velocità sono relative
Trasformazioni di Lorentz				
	Posizione di un oggetto	Tempo	Velocità di un oggetto	Commento
Sistema «in moto» con velocità $\vec{u} = (u_x, 0)$	$\vec{P}_{ogg} = (x, y)$	t	$\vec{v}_{ogg} = (v_x, v_y)$	
Sistema «fermo»	$x' = \gamma(x + u_x \cdot t)$ $y' = y$	$t' = \gamma(t + \frac{u_x x}{c^2})$	$v'_x = \frac{u + v_x}{(1 + \frac{u_x v_x}{c^2})}$ $v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{(1 + \frac{u_x v_x}{c^2})}$	Tutto è relativo. Si ha: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}$ Dove γ è detto *fattore di Lorentz*

Tabella 2.1: Trasformazioni galileiane e di Lorentz a confronto . Si è assunto che il sistema di riferimento «in moto» (immaginate un'automobile) si muove solo sull'asse delle x (questa assunzione non è restrittiva, perché si assume che il moto sia rettilineo uniforme, quindi una direzione vale l'altra).

Capitolo 3

Dilatazione dei tempi

Tramite i principi visti nel capitolo 2 proviamo a dimostrare l'effetto di *dilatazione dei tempi*. L'effetto è il seguente: **se per un osservatore «in moto» un evento ha una certa durata, per un osservatore fermo quello stesso evento ha una durata diversa**. È un effetto reale, misurabile e misurato sperimentalmente. Il nostro obiettivo è trovare un'equazione che leghi $\Delta t'$ (intervallo di tempo misurato da Benocci) e Δt (intervallo di tempo misurato da Sclano).

La situazione che immaginiamo per effettuare la nostra dimostrazione è la seguente: **Nicola Sclano va in macchina con velocità $\vec{u} = (u_x, 0)$ e lancia un raggio di luce verso l'alto**. **Francesco Benocci, sul ciglio della strada**, osserva il raggio di luce che si muove obliquamente.

Utilizzando la relatività galileiana, otterrei la seguente velocità per il raggio visto da Benocci:

$$\vec{c'} = \vec{c} + \vec{u} = (u_x, c) \tag{3.1}$$

Il cui modulo è:

$$|\vec{c'}| = \sqrt{u_x^2 + c^2} \tag{3.2}$$

Il modulo della velocità della luce è diverso da c, quindi le trasformazioni galileiane non vanno bene per descrivere la situazione.

La velocità della luce deve essere sempre la stessa. **Ma dato che la distanza percorsa nei due casi è diversa il tempo di percorrenza deve essere cambiato**. È un fatto sorprendente: lo stesso evento ha due durate diverse per i due osservatori.

La dimostrazione è la seguente (per una rappresentazione grafica guarda la figura 3.1 e 3.2)

1. La distanza percorsa dal raggio di luce per Nicola è $h = c\Delta t$.

2. La distanza percorsa dal raggio di luce per Francesco Benocci è $d = c\Delta t'$ (principio 1: la velocità della luce è sempre la stessa).

3. Per il teorema di Pitagora (si guardi la figura 3.2) si ha $d^2 = l^2 + h^2$, dove $l = u_x \cdot \Delta t'$ è lo spazio percorso dalla macchina.

4. Sostituendo, ottengo $c^2\Delta t'^2 = u_x^2\Delta t'^2 + c^2\Delta t^2$. **Dato che voglio trovare una relazione tra $\Delta t'$ e Δt**, risolvo l'equazione per la variabile $\Delta t'$. Ottengo:

$$\begin{aligned}
(c^2 - u_x^2)\Delta t'^2 &= c^2\Delta t^2 \\
(1 - \frac{u_x^2}{c^2})\Delta t'^2 &= \Delta t^2 \\
\Delta t'^2 &= \frac{\Delta t^2}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}} \\
\Delta t' &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t
\end{aligned} \tag{3.3}$$

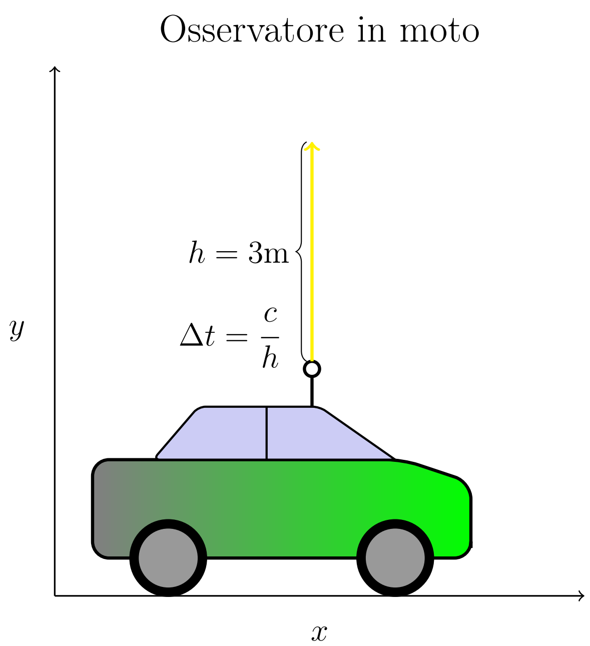


Figura 3.1: Raggio lanciato verso l'alto (per l'osservatore in moto, Sclano). Il profilo dell'automobile è stato mutuato dal sito TEXStack Exchange ([6])

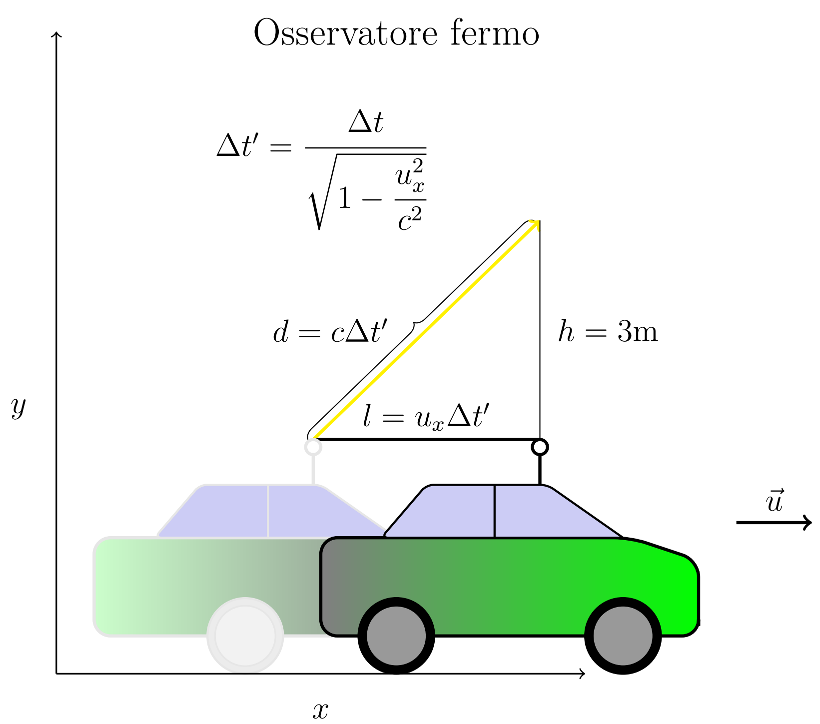


Figura 3.2: Raggio lanciato verso l'alto (per l'osservatore fermo, Benocci).

Capitolo 4

La relatività della simultaneità

La relatività della simultaneità è uno dei fenomeni relativistici più sorprendenti: due orologi sincronizzati per un osservatore potrebbero non esserlo per un altro osservatore. Questo fenomeno si verifica qualora un osservatore è in moto rispetto all'altro.

4.1 Descrizione generale del fenomeno

Per dimostrare l'esistenza di questo effetto, immaginiamo un'automobile che viaggia a una certa velocità $\vec{u}$. Come riferimento, possiamo immaginare che **l'automobile si muova verso destra**. Questa automobile dispone di due antenne: la prima, quella centrale, emette due raggi luminosi (che chiameremo r_{des} - che si muove verso destra - e r_{sin} - che si muove verso sinistra). Questi raggi vengono rilevati dalle due antenne poste lateralmente. La distanza tra l'antenna centrale e le antenne laterali, misurata da un passeggero sull'automobile, è Δx. La relazione tra il tempo trascorso dall'emissione all'assorbimento dei raggi luminosi e lo spazio percorso è chiaramente la seguente:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4.1}$$

dove c è la velocità della luce. Assumiamo che sulle tre antenne **siano posti tre orologi, che per l'osservatore in moto sono sincronizzati**. Nella nostra ipotesi tutti questi orologi segnano il mezzogiorno (12:00) (si studino le figure 4.1 e 4.2).

Se un osservatore fermo sul ciglio della strada studia la scena, vedrà un raggio r_{des} che impiegherà un tempo $\Delta t'_{des}$ per raggiungere l'antenna, mentre il raggio r_{sin} che impiegherà un tempo $\Delta t'_{sin}$. Per l'osservatore fermo, il raggio r_{sin} arriva a destinazione prima del raggio r_{des}.

Questo avviene perché la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori: i raggi luminosi andranno alla velocità della luce sia per l'osservatore fermo che per l'osservatore in moto. Ma dato che l'automobile nel frattempo si sposta verso destra, il raggio di luce r_{des} faticherà a raggiungere l'antenna destra, mentre il raggio di luce r_{sin} raggiungerà rapidamente l'antenna sinistra. **La contemporaneità dei due eventi viene meno**: per l'osservatore in moto i due raggi luminosi raggiungono le antenne laterali simultaneamente, mentre per l'osservatore fermo le antenne vengono raggiunte in momenti diversi.

4.2 Il principio di omogeneità temporale

Attenzione: l'interpretazione corretta di questo fenomeno non è così semplice come può sembrare. Ricordiamo che **per il principio di omogeneità temporale** a durate uguali per un osservatore ($\Delta t_1 = \Delta t_2$) corrispondono durate uguali per un altro osservatore ($\Delta t'_1 = \Delta t'_2$). Le durate misurate dai due osservatori sono legate dalla seguente equazione:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} \tag{4.2}$$

Per cui, se $\Delta t_1 = \Delta t_2$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta t'_2 &= \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \\ &= \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \\ &= \Delta t'_1\end{aligned} \tag{4.3}$$

Questo fatto può parere paradossale: le durate $\Delta t'_{des}$ e $\Delta t'_{sin}$ sono apparentemente diverse (un raggio arriva all'antenna prima dell'altro), mentre le equazioni ci dicono che le durate sono uguali a un unico valore $\Delta t'$. Per risolvere questo paradosso siamo costretti ad ammettere che i *i tempi assoluti* misurati dagli orologi posti sulle antenne sono cambiati (si studino le figure 4.1 e 4.2). Il tempo misurato dall'orologio destro si è spostato verso *il passato*, mentre il tempo misurato dall'orologio sinistro si è spostato verso *il futuro*. **La sincronizzazione che abbiamo assunto implicitamente all'inizio** per l'osservatore in moto **non esiste per l'osservatore fermo**.

Un concetto importante deve essere ribadito: **ragionando tramite i raggi luminosi stiamo cercando di dimostrare le proprietà dello spaziotempo**. Queste proprietà sono vere indipendentemente dal fatto che la situazione coinvolga dei raggi luminosi: noi li utilizziamo perché la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori e questo fatto semplifica i ragionamenti.

4.3 Il problema da un punto di vista quantitativo

Premettiamo che il problema (illustrato in figura 4.2) si articola in 3 istanti, con 3 orologi sfasati. Abbiamo quindi 9 valori di tempo (3 per ogni istante e per ogni orologio). Per comodità possiamo fornire dei valori di tempo per ciascuno dei 3 orologi nei 3 istanti considerati:

1. Emissione dei raggi luminosi.
   1.1. L'orologio sinistro oro$_s$ segna le 12:05.
   1.2. L'orologio centrale oro$_c$ segna le 12:00.
   1.3. L'orologio destro oro$_d$ segna le 11:55.
2. Arrivo del raggio luminoso r_{sin} a destinazione.
   2.1. L'orologio sinistro oro$_s$ segna le 12:07.
   2.2. L'orologio centrale oro$_c$ segna le 12:02.
   2.3. L'orologio destro oro$_d$ segna le 11:57.
3. Arrivo del raggio luminoso r_{des} a destinazione.
   3.1. L'orologio sinistro oro$_s$ segna le 12:17.
   3.2. L'orologio centrale oro$_c$ segna le 12:12.
   3.3. L'orologio destro oro$_d$ segna le 12:07.

Come si può desumere da queste ipotesi, **la durata dell'evento è sempre la stessa**. La durata dell'evento è definita come la differenza tra il **tempo segnato dall'orologio posto nel punto di arrivo al momento dell'arrivo del raggio** (12:07 in entrambi i casi) e **il tempo segnato dall'orologio posto nel punto di partenza del raggio al momento di partenza del raggio** (12:00). In parole povere **la durata indica quanto il raggio si è spostato nel futuro**. Nella nostra ipotesi la durata dell'evento è pari a 7 minuti sia per il raggio r_{sin} che per il raggio r_{des}.

La durata dell'evento *non* coincide con il tempo che passa secondo l'orologio centrale. Nella nostra ipotesi, infatti, per l'orologio centrale passano 2 minuti per il viaggio di r_{sin} e 12 minuti per il viaggio di di r_{des}. Il tempo che passa per l'orologio centrale è in ogni caso una quantità utile, perché quantifica **il tempo che i raggi luminosi hanno**

impiegato per arrivare a destinazione in modo coerente (l'orologio centrale è fisso e da esso partono entrambi i raggi).

Cerchiamo ora di mettere in relazione il tempo che passa per l'orologio centrale, la durata dell'evento e lo sfasamento. Avremo due equazioni. La prima varrà per r_{des} e la seconda varrà per r_{sin}:

$$t'_{C\ F_D} - t'_{C\ I} = \Delta t' + \Delta t_{sf} \tag{4.4}$$
$$t'_{C\ F_S} - t'_{C\ I} = \Delta t' - \Delta t_{sf} \tag{4.5}$$

dove $t'_{C\ I}$ è il tempo segnato dall'orologio centrale all'inizio (le 12:00), t'_{CF_S} è il tempo segnato dall'orologio centrale all'arrivo di r_{sin} (le 12:02), t'_{CF_D} è il tempo segnato dall'orologio centrale all'arrivo di r_{des} (le 12:12), e Δt_{sf} è il tempo di sfasamento (5 minuti). Dato che la durata del viaggio è pari a 7 minuti otteniamo:

$$t'_{C\ F_D} - t'_{C\ I} = 7\ \text{min} + 5\ \text{min} = 12\ \text{min} \tag{4.6}$$
$$t'_{C\ F_S} - t'_{C\ I} = 7\ \text{min} - 5\ \text{min} = 2\ \text{min} \tag{4.7}$$

In pratica, per l'orologio centrale passeranno 12 minuti prima dell'arrivo del raggio destro e 2 minuti prima dell'arrivo del raggio sinistro.

4.4 Equazione generale per il tempo di sfasamento

4.4.1 I raggi luminosi

Trovare un'equazione generale per il tempo di sfasamento non è complicato. Dobbiamo scrivere le equazioni del moto dei raggi di luce e metterle a sistema. Le equazioni sono le seguenti:

$$c \cdot (\Delta t' + \Delta t'_{sf}) = x'_i + u_x \cdot (\Delta t' + \Delta t'_{sf}) \tag{4.8}$$
$$-c \cdot (\Delta t' - \Delta t'_{sf}) = -x'_i + u_x \cdot (\Delta t' - \Delta t'_{sf}) \tag{4.9}$$

Cerchiamo di comprendere il significato di queste equazioni.

La prima è valida per il raggio r_{des}. L'equazione ci dice che lo spazio percorso dalla luce ($c \cdot (\Delta t' + t'_{sf})$) è uguale alla posizione iniziale dell'antenna (x'_i) più lo spostamento dell'antenna ($v \cdot (\Delta t' + t'_{sf})$).

La seconda è valida per il raggio r_{sin}. L'equazione ci dice che lo spazio percorso dalla luce ($-c \cdot (\Delta t' - t'_{sf})$), negativo perché il raggio va verso sinistra) è uguale alla posizione iniziale dell'antenna ($-x'_i$, opposta alla precedente) più lo spostamento dell'antenna ($v \cdot (\Delta t' - t'_{sf})$).

Riprendendo le ipotesi precedenti, **il raggio r_{des} impiega 12 minuti (7 di durata + 5 di sfasamento)** per raggiungere l'antenna, mentre **il raggio r_{sin} impiega soltanto 2 minuti (7 di durata - 5 di sfasamento)**. Le equazioni appena fornite generalizzano il problema.

4.4.2 Il tempo di sfasamento

Vogliamo trovare un'equazione per Δt_{sf}. Per farlo possiamo sommare le equazioni 4.8 e 4.9. Otteniamo:

$$\begin{aligned} c \cdot (\Delta t' + \Delta t'_{sf}) - c \cdot (\Delta t' - \Delta t'_{sf}) &= -x'_i + u_x \cdot (\Delta t' - \Delta t'_{sf}) + x'_i + u_x \cdot (\Delta t' + \Delta t'_{sf}) \\ \Delta t'_{sf} &= \frac{u_x}{c}\Delta t' \\ \Delta t'_{sf} &= \frac{u_x}{c}\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \\ \Delta t'_{sf} &= \frac{u_x}{c^2}\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \\ \Delta t'_{sf} &= \gamma\frac{u_x x}{c^2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

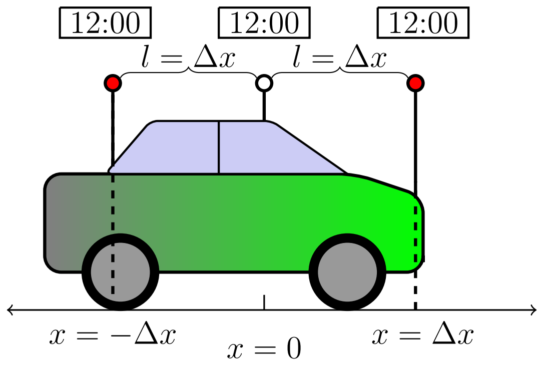
<u>Attenzione</u>: lo sfasamento è la differenza tra il tempo segnato dall'orologio centrale e quello destro, **e non viceversa** (per questo è positivo).

Analizziamo il ragionamento.

1. Nel primo passaggio sono state effettuate una serie di semplificazioni algebriche.
2. Nel secondo passaggio abbiamo trasformato la durata degli eventi per l'osservatore fermo ($\Delta t'$) nella durata degli eventi per l'osservatore in moto (Δt) tramite l'equazione (4.2).
3. Nel terzo passaggio abbiamo utilizzato l'equazione (4.1) per esprimere lo sfasamento in funzione della posizione

In base alle equazioni (4.10) osserviamo che **lo sfasamento è** (in linea di massima) **direttamente proporzionale alla velocità dell'automobile (v) e alla distanza tra le antenne laterali e quella centrale (Δx)** .

Osservatore in moto (istante iniziale)



Osservatore in moto (istante finale)

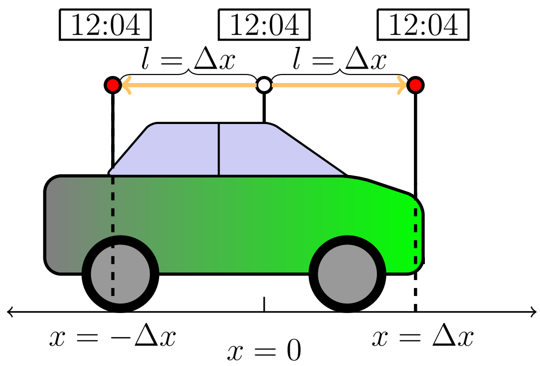


Figura 4.1: Raggi lanciati lateralmente (per l'osservatore in moto, Sclano)

4.5 Trasformazione di Lorentz per i tempi

Proviamo ora a trasformare il tempo segnato da un orologio nel sistema di riferimento «in moto» (Sclano) nel tempo segnato da un orologio nel sistema di riferimento «fermo» (Benocci). Per Sclano tutti gli orologi sono sincronizzati al tempo t, mentre per Benocci sono sfasati.

Per passare da un sistema di riferimento all'altro dovremo tener conto sia dell'effetto di *dilatazione temporale* che dell'effetto di *sfasamento* (bisogna sommarli):

$$t' = \Delta t' + \Delta t'_{sf} \tag{4.11}$$

Otteniamo:

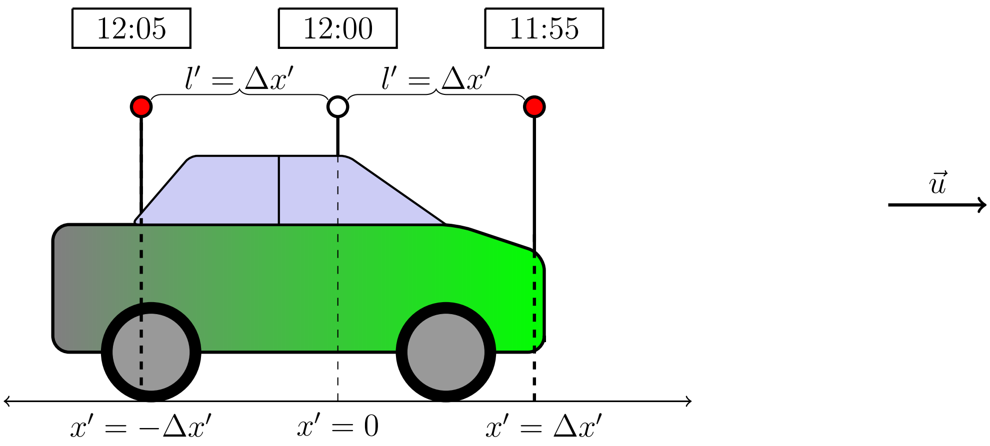
$$\begin{aligned} t' &= \gamma \Delta t + \gamma \frac{u_x x}{c^2} \\ t' &= \gamma(\Delta t + \frac{u_x x}{c^2}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Nel sistema di riferimento «in moto» $\Delta t = t$ (non c'è sfasamento, per cui è superfluo indicare la differenza tra tempo «trascorso» per un oggetto in moto e tempo «assoluto»). Otteniamo quindi la trasformazione di Lorentz per il tempo:

$$t' = \gamma(t + \frac{u_x x}{c^2}) \tag{4.13}$$

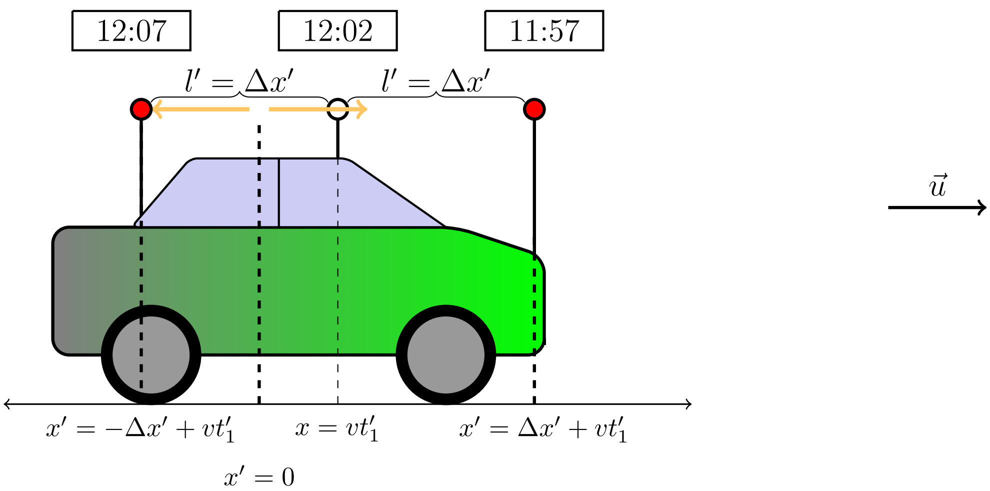
Tramite questa equazione possiamo trasformare il tempo «assoluto» di un orologio posto in un punto qualsiasi dell'asse $x$per un osservatore in moto nel tempo «assoluto» misurato da un orologio di riferimento posto nel punto $x = 0$ (l'orologio centrale dei nostri esempi) per un osservatore fermo.

Osservatore in moto (istante iniziale)



Osservatore in moto (antenna sinistra raggiunta)

$$t'_1 = \Delta t' - \Delta t_{sf}$$



Osservatore in moto (antenna destra raggiunta)

$$t'_2 = \Delta t' + \Delta t_{sf}$$

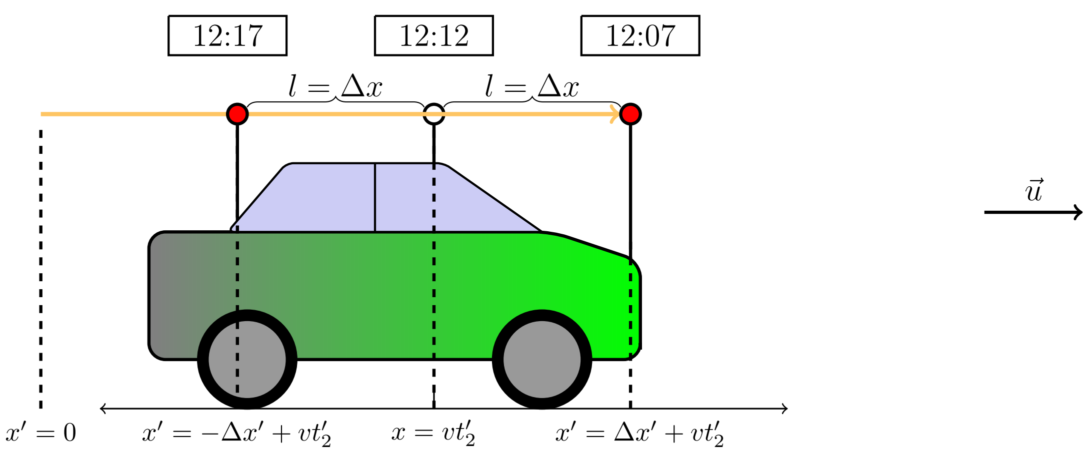


Figura 4.2: Raggi lanciati lateralmente (per l'osservatore fermo, Benocci)

Capitolo 5

Trasformazione di Lorentz per la posizione e composizione delle velocità

Ottenere le trasformazioni di Lorentz per la posizione è semplice. Vediamo come si fa.

5.1 Coordinata x

L'equazione per la coordinata x si ottiene molto semplicemente studiando il problema del capitolo 4. **La posizione dell'antenna destra per l'osservatore fermo (Benocci) è data dall'equazione** $x'(t) = c(\Delta t' + \Delta t'_{sf})$. Sapendo che $\Delta t' + \Delta t'_{sf} = \gamma(t + \frac{u_x x}{c^2})$ otteniamo rapidamente la seguente equazione:

$$\begin{aligned} x' &= c(\Delta t' + \Delta t_{sf}) \\ x' &= ct' \\ x' &= c\gamma(t + \frac{u_x x}{c^2}) \\ x' &= \gamma(ct + \frac{u_x x}{c}) \\ x' &= \gamma(x + u_x t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'ultimo passaggio è valido perché nel sistema «in moto» (Sclano) si ha $x = ct$ per la posizione dell'antenna destra e $t = \frac{x}{c}$ per il tempo di percorrenza del raggio r_{des}.

5.2 Coordinata y

La coordinata y non dipende dal tempo: se un oggetto si trova 3 metri sopra la capoccia di Sclano si troverà 3 metri anche sopra la capoccia di Benocci.

Per convincerci di questo fatto si propone un esperimento simile a quello fatto nel capitolo 3 e rappresentato in figura 5.1. **Supponiamo che Sclano abbia installato due antenne una sopra l'altra sulla scocca della sua automobile**. Lancia un raggio luminoso r_{bas} dall'alto verso il basso e un raggio luminoso r_{alt} dal basso verso l'alto. **È chiaro che i raggi luminosi arriveranno contemporaneamente per entrambi gli osservatori** per il principio di omogeneità spaziale (due distanze d uguali per Sclano corrisponderanno a due distanze d' uguali per Benocci: i due percorsi obliqui sono «speculari»).

Da questo fatto concludiamo che **sull'asse y tutti gli orologi sono sincronizzati per entrambi gli osservatori**: due eventi contemporanei sull'asse y per Sclano sono contemporanei anche per Benocci.

Dato che la velocità dell'antenna lungo l'asse y è nulla e dato che lo sfasamento temporale è nullo, **non c'è motivo di pensare che la coordinata y possa cambiare da un sistema di riferimento all'altro**. Per cui si ha:

$$y' = y \tag{5.2}$$

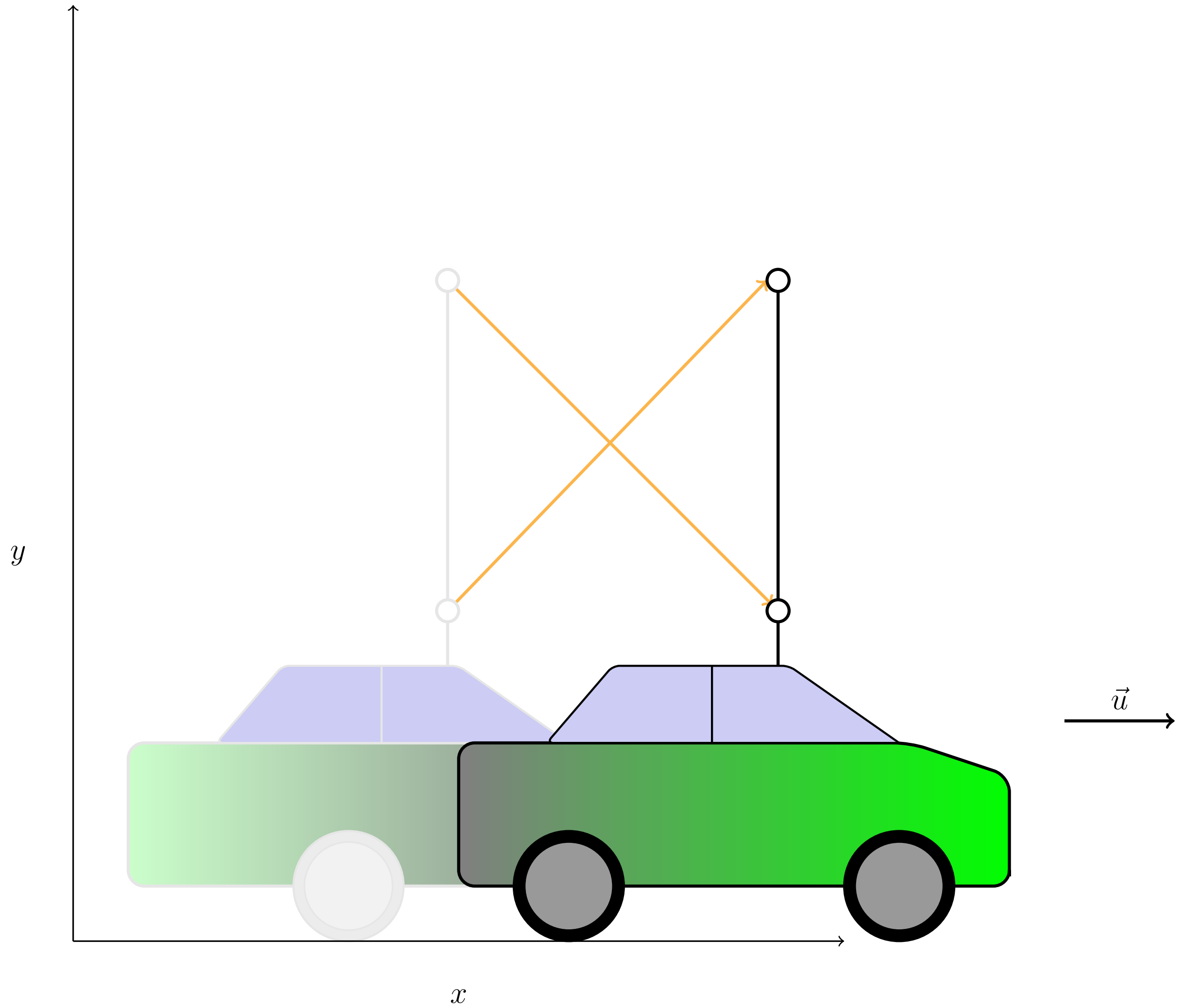


Figura 5.1: Doppio raggio lanciato da due antenne poste una sopra l'altra (per l'osservatore fermo, Benocci).

5.3 Composizione delle velocità: coordinata x

Ricordiamo che **le trasformazioni di Lorentz valgono per qualsiasi oggetto e non solo per la luce**: noi abbiamo utilizzato i raggi luminosi nei nostri esperimenti mentali solo per semplificare i calcoli e ottenere le trasformazioni di Lorentz stesse.

Immaginiamo che Sclano lanci un sasso dal finestrino con velocità $\vec{v} = (v_x, 0)$. Per trasformare la velocità $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ del sasso nel sistema Sclano nella velocità $v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ nel sistema Benocci è sufficiente utilizzare le trasformazioni di Lorentz. La velocità del sasso sarà data da:

$$
\begin{aligned}
v'_x &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \\
v'_x &= \frac{\gamma}{\gamma} \frac{\Delta x + u_x \Delta t}{\Delta t + \dfrac{u_x \Delta x}{c^2}} \\
v'_x &= \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + u_x}{1 + \dfrac{u_x \dfrac{\Delta x}{\Delta t}}{c^2}} \\
v'_x &= \frac{v_x + u_x}{1 + \dfrac{u_x v_x}{c^2}}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

5.4 Composizione delle velocità: coordinata y

Per ottenere la trasformazione per l'asse y si deve fare lo stesso ragionamento. Se Sclano lancia un sasso verticalmente, con velocità $\vec{v} = (0, v_y)$ ($v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$) otterremo la seguente velocità ($v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$) per Benocci :

$$
\begin{aligned}
v'_y &= \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \\
v'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta y}{\Delta t + \dfrac{u_x \Delta x}{c^2}} \\
v'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{1 + \dfrac{u_x \dfrac{\Delta x}{\Delta t}}{c^2}} \\
v'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 + \dfrac{u_x v_x}{c^2}}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Capitolo 6

Esercizi

Nel compito saranno presenti 3 esercizi. Gli esercizi possono essere di 5 tipologie:

a Per quanto riguarda i tempi:

   1.1. Trasformazione della durata di un evento da un sistema di riferimento all'altro.
   1.2. Calcolo di un tempo di sfasamento.
   1.3. Trasformazione del tempo segnato da un orologio nel tempo segnato da un altro orologio.

b Per quanto riguarda le lunghezze:

   2.1. Trasformazione della posizione di un oggetto da un sistema di riferimento all'altro.

c Per quanto riguarda le velocità:

   3.1. Composizione delle velocità (tramite formule esplicite o formule inverse)

6.1 Esercizi svolti

6.1.1 Testo degli esercizi

1. Tempi.

Esercizio 1.1. **Nicoletta Della Monaca**, a bordo di una navicella spaziale, lancia un'arancia verso l'alto, finché il frutto non si blocca toccando il soffitto. L'arancia percorre 2 metri. La velocità dell'arancia durante il percorso è di 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (per Nicoletta).

La scena è osservata da **Alessandro Ciuffoletti**, che misura il tempo che l'arancia impiega a raggiungere il soffitto.

a. Se la navicella si muove a una velocità di 180.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$, quale sarà l'intervallo di tempo misurato da Alessandro?
b. Supponi che Alessandro lanci a sua volta un'arancia che, per Alessandro, percorre la stessa distanza alla stessa velocità. Quale sarà la durata dell'evento dal punto di vista di Nicoletta?

Esercizio 1.2. **Supponiamo che Nicoletta si trovi a bordo di un razzo che va alla stessa velocità di quello visto nell'Esercizio 1.1.** Dal suo punto di vista su Plutone e sulla Terra si trovano due orologi perfettamente sincronizzati, che segnano le 14:00:00. **Nicoletta è diretta verso Plutone**

Sapendo che Plutone dista dalla Terra 5.000.000.000 km circa, e sapendo che per Niccolò Corsale (in visita su Plutone) l'orologio plutoniano segna le 14:00:00:

a. **Determina il tempo segnato dall'orologio terrestre per Ginevra, che si trova sulla Terra**. (**Suggerimento:** la Terra e Plutone si trovano praticamente nello stesso sistema di riferimento, perché anche se si muovono la loro velocità è irrisoria rispetto a quella della luce.)

Esercizio 1.3. Riprendiamo i dati dell'**Esercizio** 1.2. Nicoletta legge «Guerra e pace»: alle 14:30:00 lo ha terminato.

a. A che ore lo ha terminato per Corsale?
b. A che ore lo ha terminato per Ginevra?

2. Lunghezze.

Esercizio 2.1. Ed ecco **Luca Tarana**, pronto a fare un gigantesco incidente intergalattico. La sua velocità è di 240.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ **mentre sorvola la Terra**. Davanti a lui c'è Aurora Andreini su una navetta smargiassa, che va alla stessa velocità di Tarana, nella stessa direzione e nello stesso verso. La scena è osservata da Michele Carlini, che si trova fermo sulla Terra.

Sapendo che:

1. Alle 15:00:00 (orologio di Tarana) Aurora si trova a 2.000.000 km di distanza da Tarana
2. Nel sistema in moto (quindi per Tarana e Aurora) tutti gli orologi dell'Universo sono sincronizzati.
3. L'orologio di Carlini è sincronizzato con quello di Tarana alle 15:00:00.

Determina:

a. Il tempo segnato dall'orologio di Aurora quando quello di Carlini segna le 15:00:00.
b. La posizione di Aurora quando l'orologio di Aurora (per Carlini) segna le 15:00:00.

3. Velocità.

Esercizio 3.1. Riprendiamo l'esercizio precedente, **cambiando solo la velocità di Aurora**. Sapendo che:

1. Aurora, per Carlini, va a una velocità di 200.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
2. Per Carlini, l'angolo di inclinazione del razzo di Aurora rispetto allo spostamento di Tarana è 60°.

Determina:

a. Le componenti della velocità di Aurora per Tarana

6.1.2 Svolgimento degli esercizi

Esercizio 1.1.

Punto a. In questo caso è sufficiente applicare la formula 4.2. Sappiamo che:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{6.1}$$

dove $\Delta t'$ è il tempo misurato dall'osservatore «fermo», e Δt è il tempo misurato dall'osservatore in moto. Noi sappiamo anche che:

1. L'intervallo di tempo è dato da $\Delta t = \dfrac{\Delta y}{v_y}$, dove $\Delta y = 2\text{m}$ e $v_y = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. Il fattore di Lorentz è dato da $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}}$, dove u_x è la velocità della navicella rispetto ad Alessandro.

3. La velocità della navicella è esprimibile come $\dfrac{3}{5}\,c$, dato che $c = 300.000\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= \gamma \Delta t \\
\Delta t' &= \gamma \frac{\Delta y}{v_y} \\
\Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}}\frac{\Delta y}{v_y} \\
\Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}}}\frac{2}{10}\text{ s} \\
\Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}\frac{1}{5}\text{ s} \\
\Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}}\frac{1}{5}\text{ s} \\
\Delta t' &= \frac{\cancel{5}}{4}\frac{1}{\cancel{5}}\text{ s} \\
\Delta t' &= \frac{1}{4}\text{ s} \\
\Delta t' &= 0,25\text{ s}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Punto b. In questo caso, il tempo misurato da Nicoletta è pari a $\Delta t'$. Infatti, **dal punto di vista di Nicoletta la sua navicella è ferma** mentre Alessandro si muove con velocità $u_{ciuf} = -u_x$, ovvero con una velocità opposta alla sua ma uguale in modulo. Utilizzando l'equazione 4.2 si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 1.2. Prima di tutto, è necessario trovare lo sfasamento tra l'orologio terrestre e quello plutoniano. Lo sfasamento è dato dalla seguente formula:

$$\Delta t'_{sf} = \gamma \frac{u_x x}{c^2} \tag{6.3}$$

Sapendo che:

1. La distanza x tra l'orologio centrale (posto su Plutone) e la Terra è $5 \cdot 10^{12}$m.
2. La velocità della navicella è $\frac{3}{5}\,c$.
3. Il fattore di Lorentz, come nell'esercizio 1.1, vale $\frac{5}{4}$.

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Delta t'_{sf} &= \gamma \frac{u_x x}{c^2} \\
\Delta t'_{sf} &= \frac{5}{4} \cdot \frac{(\frac{3}{5}\,\cancel{c}) \cdot (5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m})}{c^{\cancel{2}}} \\
\Delta t'_{sf} &= \frac{\cancel{5}}{4}\,\frac{3}{\cancel{5}}\,\frac{5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}}{c} \\
\Delta t'_{sf} &= \frac{\cancel{3}}{4}\,\frac{5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}}{\cancel{3} \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\
\Delta t'_{sf} &= \frac{5}{4}\,10^{4}\ \mathrm{s} \\
\Delta t'_{sf} &= 12500\ \mathrm{s}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Lo sfasamento è di 12500 secondi e **la Terra si trova «avanti» nel tempo** (Della Monaca si muove verso Plutone, e lo sfasamento positivo è nella direzione opposta al moto). Per convertire il tempo in ore, minuti e secondi seguite la procedura sottostante:

1. Dividete 12500 per 3600. Il risultato è $3,47\overline{2}$. Il quoziente della divisione (3) è il numero di ore.
2. Calcolate il numero di secondi che avanzano: $12500 - 3600 \cdot 3 = 1700$. Dividete questo numero per 60. Il risultato è $28,\overline{3}$. Il quoziente della divisione (28) è il numero di minuti.
3. Calcolate il numero di secondi che avanzano: $1700 - 60 \cdot 28 = 20$. Avete finito.

Sappiamo quindi che il tempo terrestre è avanti di 3 ore, 28 minuti e 20 secondi rispetto a quello plutoniano. Per cui, se su Plutone sono le 14:00:00, sulla Terra sono le 17:28:20 (nel sistema «fermo»).

Esercizio 1.3.

Punto a. Sappiamo che l'orologio di Corsale era inizialmente sincronizzato con quello di Nicoletta. Ma se per Nicoletta passa un tempo $\Delta t = 30$ min $= 1800$ s, per Corsale passa un tempo $\Delta t' = \gamma \Delta t$, ovvero:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \Delta t \\ \Delta t' &= \frac{5}{4} \cdot 1800 \text{ s} \\ \Delta t' &= 2250 \text{ s} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Per Corsale passano 37 minuti e 30 secondi, per cui dal suo punto di vista la compagna termina il libro alle 14:37:30.

Punto b. Per Ginevra la durata dell'evento è la medesima (37 minuti e 30 secondi), perché è ferma come Corsale. Ma per lei c'è uno sfasamento di 3 ore, 28 minuti e 20 secondi in avanti, quindi il libro viene terminato alle 18:05:50.

Esercizio 2.1.

Punto a. In questo caso è sufficiente trovare il tempo di sfasamento. Sappiamo che:

1. Aurora si trova $2 \cdot 10^{12}$ m davanti a Tarana.
2. Nel sistema fermo l'orologio terrestre segna le 15:00:00.
3. La velocità di Aurora è esprimibile come $\frac{4}{5}$ c.

Prima di tutto calcoliamo il fattore di Lorentz:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}}\\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}}\\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}}\\ \gamma &= \frac{5}{3}\end{aligned} \tag{6.6}$$

Dopodiché, troviamo il tempo di sfasamento:

$$\begin{aligned}\Delta t'_{sf} &= \gamma\frac{u_x x}{c^2}\\ \Delta t'_{sf} &= \frac{5}{3}\,\frac{(\frac{4}{5}\cancel{c})\cdot(2\cdot 10^{12}\text{ m})}{c^{\cancel{2}}}\\ \Delta t'_{sf} &= \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{(2\cdot 10^{12}\text{ m})}{c}\\ \Delta t'_{sf} &= \frac{4}{3}\cdot\frac{(2\cdot 10^{12}\text{ m})}{3\cdot 10^{8}\frac{\text{m}}{\text{s}}}\\ \Delta t'_{sf} &= \frac{8}{9}\cdot 10^{4}\text{s}\\ \Delta t'_{sf} &= 8888\text{ s}\end{aligned} \tag{6.7}$$

Il tempo di sfasamento è quindi 2 ore, 28 minuti e 8 secondi. Per Carlini, l'orologio di Aurora segna le 17:28:08.

Punto b. Per trovare la posizione di Aurora quando il suo orologio (per Carlini) segna le 15:00:00 dobbiamo riportare Aurora indietro nel tempo. **Questo tempo equivale al tempo di sfasamento**. La posizione si trova con l'equazione di Lorentz sottostante:

$$x' = \gamma\cdot(x + u_x t) \tag{6.8}$$

dove x è la posizione vista da Tarana e t è il tempo trascorso per Tarana dall'istante iniziale. Ma se per Carlini dobbiamo tornare indietro di un tempo $\Delta t' = -\gamma\frac{u_x x}{c^2}$, allora per Tarana dobbiamo tornare indietro di un tempo inferiore, che si ottiene invertendo l'equazione 4.2:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = -\frac{u_x x}{c^2}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma\cdot(x - u_x\cdot[\frac{u_x x}{c^2}])\\ x' &= \gamma\cdot(x[1-\frac{u_x^2}{c^2}])\\ x' &= \gamma\cdot(x\cdot\frac{1}{\gamma^2})\\ x' &= \frac{x}{\gamma}\end{aligned} \tag{6.9}$$

Per cui, se $x = 2 \cdot 10^9$ m e $\gamma = \frac{5}{3}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{6}{5} \cdot 10^9 \text{ m} \\ x' &= 1,2 \cdot 10^9 \text{ m} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Esercizio 3.1.

In questo esercizio è sufficiente utilizzare la legge di composizione delle velocità. Troviamo prima di tutto le componenti della velocità per Carlini. Sapendo che:

1. Per Carlini $|\vec{v}| = \dfrac{2}{3}\, c$.
2. Per Carlini $\alpha = 60°$.
3. La velocità di Tarana per Carlini è $u_x = \frac{4}{5}\, c$.
4. Il fattore di Lorentz è $\gamma = \dfrac{5}{3}$.

Otteniamo le componenti per Carlini con la semplice scomposizione del vettore velocità di Aurora visto da Carlini:

$$\begin{aligned} v'_x &= |\vec{v}| \cos(\alpha) \\ v'_x &= \frac{\cancel{2}}{3}\, c \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \\ v'_x &= \frac{c}{3} \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} v'_y &= |\vec{v}| \sin(\alpha) \\ v'_y &= \frac{\cancel{2}}{3}\, c \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \\ v'_y &= \frac{c}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Per trovare v_x e v_y, ovvero le componenti del vettore velocità per Tarana, dobbiamo invertire le seguenti trasformazioni di Lorentz:

$$v'_x = \frac{u_x + v_x}{(1 + \frac{u_x v_x}{c^2})} \tag{6.13}$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{(1 + \frac{u_x v_x}{c^2})} \tag{6.14}$$

Per la coordinata x otteniamo:

$$\begin{aligned} v'_x \cdot (1 + \frac{u_x v_x}{c^2}) &= u + v_x \\ v_x + u_x &= v'_x + v'_x \cdot \frac{u_x v_x}{c^2} \\ v_x - v'_x \cdot \frac{u_x v_x}{c^2} &= v'_x - u_x \\ v_x \cdot (1 - \frac{v'_x u_x}{c^2}) &= v'_x - u_x \\ v_x &= \frac{v'_x - u_x}{1 - \frac{v'_x u_x}{c^2}} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Come si può notare, **l'equazione invertita è identica all'equazione di Lorentz originaria**, **soltanto che al posto delle somme compaiono delle sottrazioni**. Inserendo i dati otteniamo:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\frac{c}{3} - \frac{4}{5}\ c}{1 - \frac{\frac{c}{3}\cdot\frac{4}{5}\ c}{c^2}} \\ v_x &= \frac{\frac{(5-12)\ c}{15}}{1 - \frac{4}{15}} \\ v_x &= \frac{\frac{(-7)\ c}{\cancel{15}}}{(\frac{11}{\cancel{15}})} \\ v_x &= -\frac{7}{11}\ c \end{aligned} \tag{6.16}$$

Per trovare v_y dobbiamo invertire l'equazione di Lorentz:

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{(1 + \frac{u_x v_x}{c^2})} \\ v_y &= \gamma \cdot v'_y \cdot (1 + \frac{u_x v_x}{c^2}) \end{aligned} \tag{6.17}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} v_y &= \gamma \cdot v'_y \cdot (1 + \frac{u_x v_x}{c^2}) \\ v_y &= \frac{5}{3} \cdot (\frac{c}{\sqrt{3}}) \cdot (1 + \frac{(\frac{4}{5}\ c) \cdot (-\frac{7}{11}\ c)}{c^2}) \\ v_y &= \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3}}\ c \cdot (1 - \frac{28}{55}) \\ v_y &= \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{27}{55}\ c \\ v_y &= \frac{135}{165 \cdot \sqrt{3}}\ c \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.2 Esercizi da svolgere

Le soluzioni degli esercizi sono tra parentesi quadre.

1. Tempi.

Esercizio 1.1. **Sara Marconi**, a bordo di una navicella spaziale, lancia una carota verso l'alto, finché l'ortaggio non si blocca toccando il soffitto. La carota percorre 10 metri. La velocità della carota durante il percorso è di $18\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ (per Sara).

La scena è osservata da **Nicola Sclano**, che misura il tempo che la carota impiega a raggiungere il soffitto.

a. Determina il tempo Δt che la carota impiega a raggiungere il soffitto per Sara. [$\Delta t = 2$s].

b. Se la navicella si muove a una velocità di $270.000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$, trova il fattore di Lorentz γ e l'intervallo di tempo $\Delta t'$ misurato da Nicola. [$\gamma = \frac{10}{\sqrt{19}}$,$\Delta t' = 4,59$ s]

c. Supponi che Nicola lanci a sua volta una carota che, per Nicola stesso, si muove alla stessa velocità della carota di Sara ($18\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$). Se il tempo di volo è pari a $\Delta t'$, quanto sarà lo spazio percorso dalla carota di Nicola? [$\Delta x = 22,94$ m].

Esercizio 1.2. **Supponiamo che Sara si trovi a bordo di un razzo che va alla stessa velocità di quello visto nell'Esercizio 1.1.** Dal suo punto di vista su Plutone e sulla Terra si trovano due orologi perfettamente sincronizzati, che segnano le 18:00:00. **Sara è diretta verso la Terra**

Sapendo che:

1. Plutone dista dalla Terra 7.000.000.000 km circa
2. Per Edoardo Ferrara (in visita su Plutone) l'orologio plutoniano segna le 18:00:00 (si tratta quindi dell'orologio centrale):
3. Per un terrestre (sistema «fermo»), gli eventi «**Edoardo dà un pugno per terra su Plutone**» e «**Donald Trump si tinge i capelli**» sono contemporanei

Determina:

a. Lo sfasamento temporale $\Delta t'_{sf}$ tra il pugno di Edoardo e la tintura di Donald per Sara. [$\Delta t'_{sf} \approx 48090$ s]

b. **Il tempo t segnato dall'orologio terrestre per Alessia Alocci, che si trova sulla Terra**. (**Suggerimento:** la Terra e Plutone si trovano praticamente nello stesso sistema di riferimento, perché anche se si muovono la loro velocità è irrisoria rispetto a quella della luce.) [t_{ale}=04:38:30].

Esercizio 1.3. Riprendiamo i dati dell'2 Sara legge «il nome della Rosa»: alle 18:20:00 lo ha terminato.

a. A che ore lo ha terminato per Edoardo? [t_{edo}=18:45:48].

b. A che ore lo ha terminato per Alessia? [t_{ale}=05:24:18].

2. Lunghezze.

Esercizio 2.1. Ed ecco **Viola Rizzi**, pronta a partire verso l'infinito. La sua velocità è $\frac{480}{481}\ c$ **mentre sorvola la Terra**. Davanti a lei c'è Marco Morini su una navetta polifunzionale, che va alla stessa velocità di Viola, nella stessa direzione e nello stesso verso. La scena è osservata da Luca Bianciardi, che si trova fermo sulla Terra.

Sapendo che:

1. Alle 17:00:00, 3 gennaio (orologio-calendario di Viola) Marco si trova a 1.674.000.000 km di distanza da Viola stessa.
2. Nel sistema in moto (quindi per Viola e Marco) tutti gli orologi-calendari dell'Universo sono sincronizzati.
3. L'orologio-calendario di Luca è sincronizzato con quello di Viola alle 17:00:00, 3 gennaio.

Determina:

a. **Il tempo t segnato dall'orologio-calendario di Marco (in moto)** quando quello di Luca segna le 17:00:00, 3 gennaio (punto di vista di Luca). **Suggerimento**: $\sqrt{481^2 - 480^2} = 31$. [$t_{marco}$(per Luca, 1)=17:00:00, 4 gennaio]

b. **Il tempo t segnato dall'orologio-calendario di Marco (in moto)** quando quello di Luca segna le 17:31:00, 3 gennaio (punto di vista di Luca). [t_{marco}(per Luca, 2)=01:00:00, 5 gennaio]

c. **La posizione di Marco** quando l'orologio-calendario di Marco segna le 17:00:00 dal punto di vista di Luca [$x \approx 1,08 \cdot 10^{11}$ km rispetto alla Terra].

3. Velocità.

Esercizio 3.1. Riprendiamo l'esercizio precedente, **cambiando solo la velocità di Marco**. Sapendo che:

1. Marco, per Bianciardi, va a una velocità di 150.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
2. Per Bianciardi, l'angolo di inclinazione del razzo di Viola rispetto allo spostamento di Tarana è 60°.

Determina:

a. Le componenti della velocità di Marco per Bianciardi. [$v'_x = \frac{c}{4}$,$v'_y = \sqrt{3}\frac{c}{4}$]

b. Le componenti della velocità di Marco per Viola. [$v_x \approx -0,993\ c$, $v_y \approx 0,055\ c$]

Bibliografia

[1] Albert Einstein. Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento. 1905.

[2] Hippolyte Fizeau. Le ipotesi sull'etere luminifero e un esperimento che pare dimostrare che il moto dei corpi induce un mutamento della velocità con cui la luce si propaga al loro interno. 1851.

[3] Christiaan Huygens. *Traité de la lumière*. Pierre van der Aa, 1690.

[4] James Clerk Maxwell. Teoria dinamica del campo elettromagnetico. 1865.

[5] Henry Poincaré. In *Sulla dinamica dell'elettrone*, 1905.

[6] user11232. *Draw a car profile with TikZ*. TeX Stack Exchange, 2015.